JPPM Vol. 9 No. 1 (2016)

SKEMA BERPIKIR MAHASISWA DALAM MENGONSTRUKSI BUKTI FORMAL MATEMATIS MENGGUNAKAN *COGNITIVE MAPPING*

Syamsuri
Mahasiswa Pascasarjana Universitas Negeri Malang

syamsuri@untirta.ac.id

ABSTRACT

In the thinking process of constructing a formal proof, the student is trying to form a complete cognitive scheme in mind. This cognitive schema can be photographed using Cognitive Mapping. Cognitive Mapping is a mental model in the form of an image that reflects one's understanding. This study is descriptive qualitative research, conducted at the 6 students in University of Sultan Ageng Tirtayasa who have taken courses Number Theory. They worked on the problems by think aloud, followed by interview-based problem. The results showed that students thought the scheme can be categorized and modeled in four quadrants process of thinking in constructing a formal proof.

Keywords: Thinking scheme, Formal Proof, Cognitive Mapping.

Abstrak

Dalam melakukan proses berpikir mengonstruksi bukti formal matematis, tentunya mahasiswa berusaha untuk membentuk skema kognitif yang lengkap dalam pikirannya. Skema kognitif ini dapat dipotret menggunakan *Cognitive Mapping*. *Cognitive Mapping* merupakan model mental dalam bentuk gambar yang mencerminkan pemahaman seseorang. Penelitian ini termasuk penelitian kualitatif deskriptif, yang dilakukan pada 6 mahasiswa Universitas Sultan Ageng Tirtayasa yang telah mengambil mata kuliah Teori Bilangan dengan mengerjakan soal secara *think aloud*, kemudian dilanjutkan dengan wawancara berbasis soal tersebut. Hasil penelitian menunjukkan bahwa skema berpikir mahasiswa dapat dikategorikan dan dimodelkan dalam 4 kuadran proses berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi bukti formal matematis.

Kata kunci : Skema Berpikir, Bukti Formal, *Cognitive Mapping*

A. PENDAHULUAN

Bukti dan pembuktian matematis merupakan bagian yang penting dalam matematika, karena sebagai tiang pada bangunan matematika. Oleh karena itu, pendidikan matematika khususnya dalam pembelajaran matematika di perguruan tinggi menekankan pada kemampuan pembuktian matematika. Mahasiswa yang masuk pada jenjang perguruan tinggi harus mengembangkan pengetahuan matematika secara formal. Bukti formal (*formal proof*) mengacu pada bentuk logika yang akurat seperti yang dijelaskan oleh Hilbert, atau mengacu pada bentuk bukti yang digunakan oleh matematikawan untuk saling dikomunikasikan dalam kegiatan seminar atau artikel ilmiah (Tall dkk., 2010). Dengan demikian, mahasiswa perlu dilatih pembuktian matematika sehingga mampu memahami struktur bangunan matematika formal. Oleh karena itu, mahasiswa diperkenalkan dengan bukti formal dalam belajar matematika murni di perguruan tinggi, bertujuan untuk membuat makna (*sense*) suatu definisi formal sebagai cara yang dapat digunakan dalam membangun teorema secara deduksi.

Dalam proses berpikir yang dilakukan mahasiswa dalam mengonstruksi bukti, Pinto dan Tall (1999) menggunakan istilah 'alami' (*natural*) untuk menggambarkan proses penggalian makna (*extracting meaning*) dan istilah 'formal' untuk proses pemberian makna (*giving *meaning*) yang bekerja secara formal. Selain istilah 'alami' dan 'formal', Weber (2004) menambahkan gagasan belajar 'prosedural' bagi mahasiswa yang hanya berusaha untuk mengatasi definisi formal dan bukti dengan belajar hafalan. Adapun Alcock dan Weber (2004) menklasifikasikan respon mahasiswa menjadi 'semantik' (*semantic*) dan 'sintaksis' (*syntactic*), dengan mendasarkan istilah secara bahasa yang pada dasarnya mengacu pada makna bahasa (isi semantik) dan struktur bahasa (sintaks). Alcock dan Weber menggambarkan pendekatan sintaksis sebagai salah satu strategi dalam pembuktian matematis dengan bekerja dari pembacaan literal dari definisi yang terlibat dan pendekatan semantik sebagai strategi dalam memanfaatkan pemahaman intuitif suatu konsep. Hal ini sebenarnya sejalan dengan istilah ekstraksi (*extracting meaning*) dan pemberian makna (*giving meaning*) dalam kategori 'formal' dan 'alami'.

Dalam teori pemrosesan informasi, proses pembuktian matematis tentunya selalu melibatkan arsitektur kognitif manusia (*human cognitive architecture*). Arsitektur kognitif manusia diartikan sebagai suatu cara mengorganisasikan struktur dan fungsi yang diperlukan dalam proses kognitif manusia. Struktur kognitif tersebut terdiri atas memori kerja dan memori jangka panjang (Sweller et al., 2011). Memori kerja merupakan tempat pemrosesan informasi, sedangkan memori jangka panjang merupakan tempat disimpannya informasi-informasi dalam bentuk skema-skema (skemata) (Sweller, 2011). Skema merupakan konstruksi kognitif yang bertugas mengelola unsur-unsur informasi dalam memori jangka panjang (Sweller, 1994). Semua pengetahuan yang diperoleh oleh seseorang disimpan dalam bentuk skema yang dikelola dalam unit-unit. Skema merupakan suatu sistem dalam pikiran manusia yang bertugas memahami pengetahuan, mempresentasikan pengetahuan, dan menggunakan pengetahuan tersebut. Oleh karena itu, skema mengandung semua informasi dan hubungan-hubungan tentang suatu konsep.

Hal yang penting dari skema manusia adalah bahwasanya suatu konsep yang dikelola skema berkembang seiring dengan pengalaman dan pengetahuan baru. Hal tersebut berarti bahwa skema manusia merupakan suatu hal yang dinamik, dapat berubah dari waktu ke waktu tergantung pengalaman dan informasi baru yang diperoleh. Skema dikelola melalui asimilasi dan akomodasi. Asimilasi merupakan proses menginterpretasikan pengetahuan dan pengalaman baru dengan skema yang ada, sedangkan akomodasi merupakan proses mengganti skema yang lama dengan skema baru yang lebih kompleks. Perolehan skema yang baru harus diproses secara sadar dan membutuhkan proses berpikir (Sweller & Sweller, 2006). Skema yang lebih kompleks hasil rekonstruksi skema lama mengandung informasi dalam skema sebelumnya. Sehingga tingkat kompleksitas skema dalam pikiran manusia terus berkembang sepanjang waktu.

Penelitian yang ada telah mengungkapkan bahwa kebanyakan siswa mengalami kesulitan dalam mengkonstruksi bukti matematis (Moore, 1994; Knapp, 2005; Selden et al, 2010; Sowder & Harel, 2003). Moore (1994) mengungkapkan ada 7 kesulitan yang dialami mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti, yaitu : (1) mahasiswa tidak mengetahui definisi objek atau konsep matematika tertentu yang dibutuhkan dalam pembuktian, (2) mahasiswa kurang memahami konsep, (3) *Concept image* mahasiswa tidak cukup dalam mereknstruksi bukti, (4) mahasiswa tidak mampu menggeneralisasi dari beberapa contoh kasus, (5) mahasiswa tidak tahu bagaimana mengunakan definisi yang ada, (6) mahasiswa mengalami kesulitan dalam menggunakan notasi dan bahasa matematis, dan (7) mahasiswa tidak tahu bagaimana memulai pembuktian. Sedangkan Knapp (2005) berpendapat bahwa apa yang dikemukakan Moore di atas merupakan kesulitan yang berkaitan dengan pemahaman konsep, dan bukan mencakup kekesulitan siswa dalam berlogika deduktif dalam mengonstruksi bukti. Oleh karena itu, Knapp (2005) mengajukan bahwa kesulitan mahasiswa dalam megonstruksi bukti, yaitu : (1) mahasiswa sulit dalam berlogika, berbahasa matematika formal, (2) mahasiswa kurang sempurna dalam memahami suatu definisi atau teorema yang berkaitan dengan yang akan dibuktikan, heuristik dan menggeneralisasi suatu contoh.

Dalam melakukan proses berpikir mengonstruksi bukti formal matematis, tentunya mahasiswa berusaha untuk membentuk skema kognitif yang lengkap dalam pikirannya. Skema kognitif ini dapat dipotret menggunakan *Cognitive Mapping. Cognitive Mapping* merupakan model mental dalam bentuk gambar yang mencerminkan pemahaman seseorang, keyakinan, dan pengaturan suatu obyek analisis, yang diperoleh dari proses kognitif (Peña, Sossa & Gutiérrez, 2007). Oleh karena proses, kesulitan mahasiswa dalam mengonstruksi bukti dapat digambarkan dengan *Cognitive Mapping*.

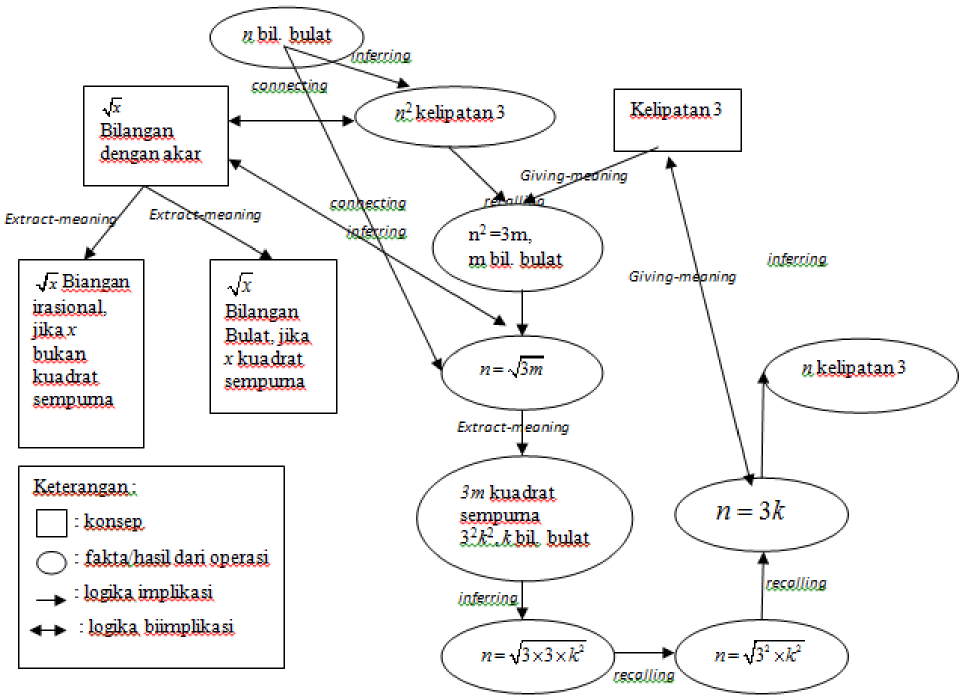
Berdasarkan penjelasan di atas, proses pembuktian matematis sangatlah berhubungan dengan transformasi struktur kognitif mahasiswa, yang berupa pengelolaan pengetahuan yang dimiliki dan perubahan skema kognitif dalam mengonstruksi bukti matematis. Oleh karena itu, tujuan penelitian ini ialah 1) untuk mengetahui karakteristik skema berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi bukti formal.

B. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan pada 6 mahasiswa Universitas Sultan Ageng Tirtayasa yang telah mengambil mata kuliah Teori Bilangan. Para mahasiswa diberikan kesempatan untuk mengerjakan tugas berbentuk soal yang diberikan secara *think aloud*, kemudian dilanjutkan dengan wawancara berbasis tugas. Transkrip *think aloud* dianalisis menurut kerangka asimilasi dan akomodasi yang dikemukan oleh Piaget. Analisis data menggunakan teknik perbandingan tetap, yaitu diambil 2 mahasiswa yang memiliki karakteristik kesalahan yang sama dalam mengonstruksi bukti matematis.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

Instrumen yang digunakan dalam penelitian ini merupakan instrumen yang diadopsi Selden & Selden (2003). Soal tersebut ialah “Diketahui n bilangan bulat. Buktikan “ Jika n^2 kelipatan 3 maka n kelipatan 3”. Pembuktian pernyataan di atas, setidaknya dapat dikonstrusi dengan 2 cara, yaitu : bukti langsung dan bukti tidak-langsung menggunakan kontrapositif. Berikut model skema pembuktian langsung tersebut.



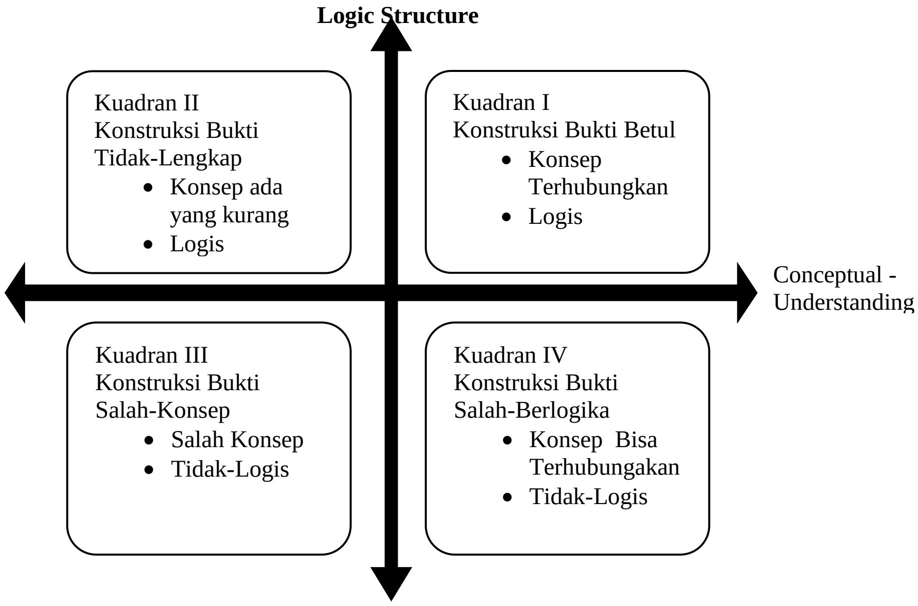
Gambar 1. ***Cognitive Mapping*** **Skema Berpikir Untuk Bukti Langsung & Sketsanya**

Kategorisasi Skema Berpikir Mahasiswa Dalam Mengonstruksi Bukti

Berdasarkan penjelasan bukti formal (*formal proof*) yang dikemukan Tall dkk. (2011) dan Weber (2003), setidaknya ada 2 komponen yang harus ada dan dipahami dalam bukti formal, yaitu : berawal dengan definisi atau aksioma dan menggunakan logika yang akurat (*rigour*). Demikian pula jika mengacu pada Knapp (2005) terkait kesulitan mahasiswa dalam megonstruksi bukti, yaitu : (1) mahasiswa sulit dalam berlogika, berbahasa matematika formal, (2) mahasiswa kurang sempurna dalam memahami suatu definisi atau teorema yang berkaitan dengan yang akan dibuktikan, heuristik dan menggeneralisasi suatu contoh. Oleh karena itu, artikel ini akan mengupas tentang logika dan pemahaman konsep yang digunakan dalam mengonstruksi bukti.

Moore (1994) menyatakan bahwa ada 2 alur mahasiswa dalam mengonstruksi bukti, yaitu: (1) *Concept Image* → *Concept Definition* → *Concep Usage*, dan (2) *Concept Image* → *Concept Usage*. *Concept-image* merupakan gambaran kognitif mahasiswa terhadap konsep yang diberikan, *concept-definition* merupakan konsep matematis yang dinotasikan dalam bentuk formal, sedangkan *concept-usage* merupakan konsep yang digunakan mahasiswa dalam mengonstruksi bukti. Alur pertama identik dengan formal sedangkan alur kedua identi dengan natural.

Berdasarkan pertimbangan deskripsi tentang bukti formal matematis yang dikemukan para peneliti sebelumnya (Tall dkk, 2011; Weber, 2003; Knapp , 2005), artikel ini mengajukan suatu model yang mengadopsi logika dan pemahaman konsep dalam dalam mengonstruksi bukti. Model ini mengevaluasi suatu bukti formal berdasarkan pemahaman konsep dan struktur logis.



Gambar 2. Model Skema Pembuktian Mahasiswa Dalam Mengonstruksi Bukti

***Cognitive Mapping* Skema Berpikir Mahasiswa Pada Kuadran II**

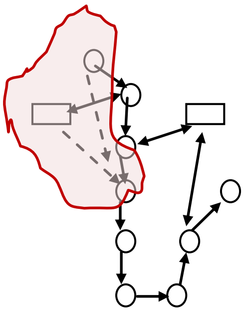
Karakteristik skema berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi bukti formal pada kuadran ini, yaitu : ada konsep yang kurang tepat digunakan. Pada penelitian ini, terdapat 2 mahasiswa yang skema berpikirnya tergolong pada kuadran ini. Berikut gambaran proses berpikir Mahasiswa-1 yang termasuk dalam kuadran II.

Tabel 1. Proses Berpikir Mahasiswa-1 Dalam Mengonstruksi Bukti Matematis

Kode	*Think Out Aloud*	Sumber Pernyataan	Proses Yang Terjadi
1	Diketahui n^2 kelipatan 3	*Recalling* yang diketahui	Asimilasi
2	berarti $n^2 = 0$ mod 3.	*Extract-meaning* dari n^2 kelipatan 3dengan menghubungkan dengan konsep modulo 3	Asimilasi
3	n^2=3 dikali k	*Extract-meaning* dari n^2 kelipatan 3 3dengan menghubungkan dengan konsep perkalian	Asimilasi
4	, ….. gimana ya…? (agak lama berpikir sekitar 1 menit)	Refleksi karena Disequilibrium	Disequilibrium
5	n^2 samadengan 3k, dan n bilangan positif berarti……mmm…… berarti n = akar dari 3k	*Recalling* dengan Modifikasi Aljabar	Asimilasi
6	berarti karena n bilangan bulat positif, maka k haruslah bilangan positif kelipatan 3 yang berpangkat ganjil….	*Inferring* dengan Mencari Hubungan dengan bilangan pangkat	Akomodasi
7	Misalkan k sama dengan 3 pangkat m dengan m bilangan	*Inferring* dengan Mencari Hubungan dengan bilangan	Akomodasi

	…. sehingga ganjil	pangkat	
8	Berarti n = akar dari 3 kali 3 pangkat m, n = akar dari 3 pangkat m+1, n=3 pangkat (m+1)/2	*Recalling* dengan Modifikasi Aljabar	Asimilasi
9	Karena m ganjil maka m+1 pastilah genap.	*Inferring* dengan Mencari Hubungan dengan bilangan pangkat	Akomodasi
10	Sehingga n=3 pangkat m+1….sehingga n= 0 mod 3, terbukti. Udahan Pak	*Inferring*	Akomodasi

Berdasarkan Tabel 1 di atas dan Gambar 1 terkait *cognitive mapping* pada konstruksi bukti yang benar, skema berpikir pada kuadran ini mengalami kesalahan dalam mengkoneksikan dengan konsep bilangan akar dan bilangan bulat. Hal ini terutama pada proses *inferring* dalam mencari bubungan dengan bilangan pangkat. Berikut gamabaran sketsa *cognitive mapping* dan letak yang harus diperbaiki dalam mengonstruksi bukti matematis formal.



Gambar 3. Sketsa *Cognitive Mapping* Skema Berpikir Mahasiswa-1 Dalam Mengonstruksi Bukti

***Cognitive Mapping* Skema Berpikir Mahasiswa Pada Kuadran III**

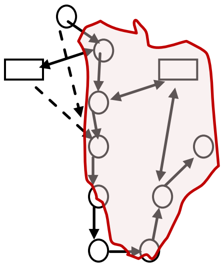
Karakteristik skema berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi bukti formal pada kuadran ini, yaitu : salah konsep dan tidak-logis. Pada penelitian ini, terdapat 2 mahasiswa yang skema berpikirnya tergolong pada kuadran ini. Berikut gambaran proses berpikir Mahasiswa-2 yang termasuk dalam kuadran III.

Tabel 2. Proses Berpikir Mahasiswa-2 Dalam Mengonstruksi Bukti Matematis

Kode	*Think Out Aloud*	Sumber Pernyataan	Proses Yang Terjadi
1	Diketahui n bilangan bulat positif, Jika n^2 kelipatan3 maka n kelipatan 3	*Recalling* yang diketahui (diulangi sebanyak 2 kali)	Asimilasi
2	n^2 kelipatan 3, maka n kelipatan 3, n bilangan bulat positif	*Inferring* antara n^2 dengan n	Akomodasi
3	Buktinya berarti … ehhmmm….. ehmmm…	Refleksi karena Disequilibrium	Disequilibrium
4	n^2=n kali 3.. nxn=3n…n=3	*Recalling* dengan Modifikasi	Asimilasi

	ya….	Aljabar	
5	n^2=3n berarti … Udah….	*Inferring* kesimpulan	Akomodasi

Berdasarkan Tabel 2 di atas dan Gambar 1 terkait *cognitive mapping* pada konstruksi bukti yang benar, skema berpikir pada kuadran ini mengalami kesalahan dalam mengonstruksi bukti. Beberapa kesalahan yang dilakukan Mahasiswa-2 dalam mengonstruksi bukti tersebut ialah : 1) Salah dalam menuliskan lambang variabel yang membantu dalam mengonstruksi bukti, 2) Salah dalam melakukan *inferring* antara n^2 dengan n. Kedua kesalahan tadi menyebabkan kesalahan-kesalahan lainnya dalam konstruksi bukti tersebut. Berikut gamabaran sketsa *cognitive mapping* dan letak yang harus diperbaiki dalam mengonstruksi bukti matematis formal.



Gambar 4. Sketsa *Cognitive Mapping* Skema Berpikir Mahasiswa-2 Dalam Mengonstruksi Bukti

***Cognitive Mapping* Skema Berpikir Mahasiswa Pada Kuadran IV**

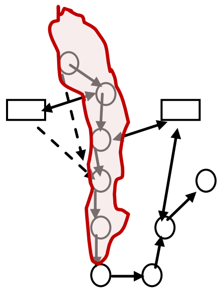
Karakteristik skema berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi bukti formal pada kuadran ini, yaitu: struktur pembuktian yang tidak-logis tetapi konsep sudah mencukupi dalam mengonstruksi pembuktian. Pada penelitian ini, terdapat 2 mahasiswa yang skema berpikirnya tergolong pada kuadran ini. Berikut gambaran proses berpikir Mahasiswa-1 yang termasuk dalam Kuadran IV.

Tabel 3. Proses Berpikir Mahasiswa-3 Dalam Mengonstruksi Bukti Matematis

Kode	*Think Out Aloud*	Sumber Pernyataan	Proses Yang Terjadi
1	Kita akan mengerjakan apabila diketahui n bilangan bulat positif	*Recalling* yang diketahui	Asimilasi
2	buktikan bahwa jika n^2 kelipatan 3 maka n kelipatan 3	*Extract-meaning* dari n^2 kelipatan 3	Asimilasi
3	Nah kita akan membuktikan dengan pembuktian terbalik atau kita akan buktikan bahwaapabila n kelipatan 3 maka n^2 kelipatan 3	*Inferring* dalam memutukan cara mengonstruksi bukti	Akomodasi
4	Misalkan n kelipatan 3 sehingga n= 3x maka jika n ini 3x maka n^2=(3x) dikuadratkan sehingga n^2=9x^2	*Extract-meaning* dari n^2 kelipatan 3 dengan menghubungkan dengan konsep perkalian	Asimilasi
5	Nah….eee……..Nah disini	Refleksi karena	Disequilibrium

	kita lihat bahwa n itu n=3x berarti n kelipatan 3 dan $n^2=9x^2$ dimana $9x^2$ ini juga merupakan kelipatan 3.	Disequilibrium	
6	Kelipatan 3 dari 3x, sehingga terbukti jika n kelipatan 3 maka n^2 nya juga kelipatan 3.	*Inferring* kesimpulan	Akomodasi

Berdasarkan Tabel 3 di atas dan Gambar 1 terkait *cognitive mapping* pada konstruksi bukti yang benar, skema berpikir pada kuadran ini mengalami kesalahan dalam mengonstruksi bukti. Kesalahan utama yang dilakukan Mahasiswa-3 dalam mengonstruksi bukti tersebut ialah salah dalam metode pembuktian dalam mengonstruksi bukti. Kesalahan tersebut menyebabkan kesalahan-kesalahan lainnya dalam konstruksi bukti tersebut. Berikut gamabaran sketsa *cognitive mapping* dan letak yang harus diperbaiki dalam mengonstruksi bukti matematis formal.



Gambar 5. Sketsa *Cognitive Mapping* Skema Berpikir Mahasiswa-3 Dalam Mengonstruksi Bukti

D. KESIMPULAN DAN SARAN

Skema berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi bukti matematis dapat dimodelkan dengan mengguakan *cognitive mapping*. *Cognitive mapping* yang digunakan menggambarkan konsep matematis yang diperlukan, fakta atau hasil dari operasi matematik, hubungan logika, dan proses berpikir yang dilakukan mahasiswa pada setiap hubungan konsep ataupun fakta matematis. Dengan memodelkan skema berpikir seperti itu, dapat diidentifikasi kegagalan mahasiswa dalam mengonstrksi bukti matematis dengan benar.

Berdasarkan skema berpikir yang dimodelkan, proses berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi bukti matematis dapat dikategorikan dalam 4 kuadran, yaitu : (1) Kuadran I yang mampu membuat skema berpikir dengan banar; (2) Kuadran II yang mengalami ketidak-lengkapan konsep yang disebabkan mahasiswa tidak melakukan refleksi sehingga konsep yang diperlukan dapat digunakan dengan lengkap; (3) Kuadran II yang mengalami salah konsep yang dikarenakan pengetahuan awal yang tidak-cukup dan mahasiswa tidak mengenal alur pembuktian yang benar (4) Kuadran IV yang salah berlogika yang disebabkan penggunaan pengetahuan awal yang dimilikinya tidak sesuai dengan struktur pembuktian yang diharapkan.

Untuk lebih menggali kedalaman bahasan terkait model kuadran yang digunakan pada artikel ini, diharapkan dapat menggunakan instrumen yang lebih kompleks sehingga mampu memberikan gambaran yang lebih besar. Disamping itu pula, pada penelitian berikutnya disarankan dapat menggali lebih dalam terkait usaha perbaikan dalam mengonstruksi bukti dengan benar, sehingga setiap mahasiswa yang mengalami skema berpikir yang salah dapat diperlakukan sesuai dengan tipe kesalahannya.

DAFTAR PUSTAKA

Alcock, L., & Weber K. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209-234.

Knapp, J. (2005). Learning to prove in order to prove to learn. [online] : Retrieved from URL: http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics*, 27,249-266.

Peña, A.; Sossa, H. & Gutiérrez, A. (2007). Cognitive Maps: an Overview and their Application for Student Modeling (Mapas Cognitivos: un Perfil y su Aplicación al Modelado del Estudiante). *Computación y Sistemas Vol. 10 No. 3, 2007, pp 230-250*

Pinto, M. M. F., & Tall, D. O. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, (pp. 65–73). Haifa, Israel.

Selden, A, McKee, K. & Selden, J. (2010). Affect, behavioural schemas and the proving process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 41, No. 2, 15 March 2010, 199–215

Selden, A. & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem?. *Journal for Research in Mathematics Education* 2003, Vol. 34, No. 1,4-36.

Sowder, L. & Harel, G. (2003). Case studies of mathematics majors' proof understanding, production, and appreciation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 3:2, 251-267, DOI:10.1080/14926150309556563

Sweller, J. (1994). Cognitive Load Theory, Learning difficulty, and Instructional Design. *Learning and Instruction*, 4, 295–312.

Sweller, J. (2011). Cognitive Load Theory. In J. P. Mestre & B. H. Ross (Eds.), *The Psychology of Learning and Cognition in Education* (pp. 37–74). Waltham: Elsevier. doi:10.1016/B978-0-12-387691-1.00011-9

Sweller, J., & Sweller, S. (2006). Natural information processing systems. *Evolutionary Psychology*, 4, 434–458. Retrieved from http://www.epjournal.net/wp-content/uploads/ep04434458.pdf

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive Load Theory: Explorations in the Learning Sciences , Instructional Systems and Performance Technologies*. London: Springer.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y.H. (2011). The Cognitive Development of Proof. In In Hanna, G. and De Villiers, M. (Eds). ICMI 19: *Proof and Proving in Mathematics Education*, pp.13–49.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 115–133.