

# ARGUMENTASITASIMATEMATIS MAHASISWA CALON GURU PADA SUATU KONJEKTUR MATEMATIKA

Sukirwan

Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sultan Ageng Tirtayasa

[skbtn309528@yahoo.com](mailto:skbtn309528@yahoo.com)

## ABSTRACT

*Mathematical argument is a capability that is associated with reasoning and mathematical proof. Mathematical arguments characterizing the quality of mathematical reasoning, how to explore and communicate mathematical reasoning. Arguments set of the student's ability to give reasons for a mathematical reasoning, and construct mathematical proof according with the stages of abstraction student achievement. In this context, proof is seen as a process and human activities are not only rely on formal deduction system. Achievement of students at a level of abstraction is the interpretation given to the mathematical representation.*

**Keywords:** *mathematical arguments, mathematical proof, mathematical reasoning*

## ABSTRAK

Argumentasi matematis merupakan kemampuan yang sangat terkait dengan penalaran dan bukti matematis. Argumentasi matematis mencirikan kualitas penalaran matematis, bagaimana mengeksplorasi dan mengkomunikasikan penalaran matematis. Argumentasi berangkat dari kemampuan siswa dalam memberikan alasan terhadap suatu penalaran matematis, dan mengkonstruksi bukti matematis sesuai dengan tahapan pencapaian abstraksi siswa. Dalam konteks ini, bukti dipandang sebagai suatu proses dan aktivitas manusia (*human activity*) yang tidak hanya bertumpu pada sistem deduksi formal. Capaian siswa pada suatu level abstraksi merupakan interpretasi terhadap representasi matematis yang diberikan.

**Kata kunci:** *argumentasi matematis, bukti matematis, penalaran matematis*

## A. PENDAHULUAN

Pembelajaran pembuktian merupakan kegiatan yang sangat penting dalam pembelajaran matematika. Pembelajaran ini begitu identik dengan kemampuan penalaran matematik siswa yang merupakan salah satu tujuan dari matematika di sekolah. Seperti yang tercantum dalam permendiknas No. 22 tahun 2006 (Depdiknas, 2006) bahwa salah tujuan matematika disekolah diarahkan agar siswa mampu menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika. Begitu juga dalam kurikulum 2013, walaupun tidak dinyatakan secara eksplisit, tetapi tuntutan pendekatan saintifik seperti mengurai, menyaji, dan merangkai menyiratkan

bahwa siswa harus mampu berargumentasi dan menyusun bukti matematik.

Kendatipun begitu, kemampuan siswa dalam menyusun bukti matematik selalu banyak mengalami kendala. Hal yang nampaknya masuk akal mengingat pembuktian ini memerlukan penalaran matematik tingkat tinggi terutama pada saat siswa diminta untuk menyusun argumentasi secara logis. Selain itu pembuktian dalam matematika biasanya mengacu pada algoritma yang sifatnya kaku bersumber pada teorema tertentu ataupun pada aksioma atau postulat yang telah dibuktikan sebelumnya. Pandangan seperti inilah yang kemudian menjadikan pembelajaran pembuktian tidak disukai oleh siswa dan banyak diabaikan oleh guru, baik di Indonesia maupun di negara-negara yang sudah maju.

Meskipun pembuktian matematik secara formal telah mempengaruhi para matematikawan dan memajukan pemahaman komunitas matematika, namun tidak sedikit para ahli pembelajaran matematika seperti Freudenthal, Lakatos, Schoenfeld dan Tall (Liu, 2013:3) yang mengkritik kekakuan bukti matematik dalam konteks formal. Para sarjana ini melihat dampak kekakuan bukti matematik pada bidang pendidikan bahwa bukti formal yang mengacu pada prinsip deduktif hanya cocok untuk kalangan tertentu. Padahal belajar pembuktian tidak hanya terbatas pada verifikasi dan sistematika bukti, tetapi pembuktian dapat dijadikan sebagai bahan untuk komunikasi dan tantangan intelektual. Seperti yang diungkapkan de Villiers (Liu, 2013:4) yang menawarkan kerangka kerja untuk menggambarkan enam fungsi pembuktian dalam matematika, yaitu: verifikasi, penjelasan, sistematisasi, penemuan, komunikasi dan tantangan intelektual.

Mencermati kekakuan dan pentingnya pembelajaran pembuktian, beberapa ahli seperti Balacheff (1988); Bell (1976) dan Harel & Sowder (1998) termasuk van Hiele (1986) telah mengusulkan apa yang mereka sebut taksonomi skema bukti yang menjelaskan bahwa kecenderungan siswa dalam menguraikan (memberikan argumentasi) pada suatu pembuktian sangat beragam dan dapat dibuat menjadi level-level tertentu (Liu, 2013). Balacheff (1988) membagi skema bukti menjadi 4 level, yaitu *naive empiricism*, *the crucial experiment*, *the generic example*, dan *the thought experiment*. Bell (1976) membagi skema bukti menjadi 2 bagian, yaitu: *empirical* dan *deductive*. Sedangkan Harel & Sowder (1998) membagi skema bukti menjadi tiga bagian, yaitu: *external*, *empirical* dan *analytical*. van Hiele (1986) secara khusus membuat skema bukti berdasarkan pada pembelajaran geometri mencakup taksonomi: *visual*, *analytic*, *informal deductive*, *formal deductive*, dan *rigor*.

Kendatipun para ahli ini telah berhasil membuat skema pembuktian yang secara empiris muncul dari beragam kemampuan siswa, namun hal yang tak kalah penting adalah bagaimana siswa dapat memunculkan argumentasi-argumentasi tersebut. Hal yang menjadi menarik adalah bagaimana siswa memverifikasi argumentasi-argumentasi yang ia berikan. Patut diduga bahwa kecenderungan siswa pada level tertentu akan berubah seiring dengan bertambahnya pengetahuan yang ia peroleh termasuk pada saat ia dapat memilih argumentasi lain yang menurutnya lebih logis. Liu (2013) sendiri telah membuktikan bahwa siswa cenderung tidak dapat mempertahankan argumentasinya manakala ia memperoleh argumentasi lain yang menurutnya lebih benar. Selain itu, kecenderungan siswa dalam pembuktian lebih suka pada cara-cara aljabar. Bergqvist (2005) telah membuktinya dengan mengkaji bagaimana siswa melakukan verifikasi terhadap suatu konjektur. Ia menemukan bahwa kebanyakan siswa lebih suka bekerja pada aljabar. Padahal berdasarkan taksonomi skema bukti dari Balacheff (1988) pengerjaan dengan cara aljabar ini termasuk kategori penalaran matematis tingkat tinggi yang *notabene* dianggap oleh siswa sebagai kategori yang sulit.

Hasil penelitian kedua praktisi inilah yang kemudian mengilhami penulis untuk mencoba menyelidiki bagaimana seseorang melakukan verifikasi terhadap suatu konjektur. Penyelidikan dilakukan melalui tes dan wawancara pada seorang mahasiswa jurusan pendidikan matematika semester 2. Materi dipilih berkaitan dengan fungsi kuadrat. Penulis menganggap materi ini telah dikuasai oleh responden mengingat responden sebelumnya telah mengenal materi ini saat belajar kalkulus dan saat ia duduk di bangku SMA.

Agar hasil dari penyelidikan ini terarah, pertanyaan-pertanyaan penyelidikan diajukan sebagai berikut.

1. Pada level manakah responden memberikan argumentasi pada suatu

- konjektur berdasarkan taksonomi skema bukti dari Balacheff?
2. Apakah responden akan mempertahankan argumentasinya pada

saat ditunjukkan argumentasi yang lain?

3. Berdasarkan pada taksonomi skema bukti dari Balacheff, cara manakah yang lebih disukai responden?

## B. METODE PENELITIAN

Metode yang dipilih dalam penyelidikan ini adalah tes dan wawancara. Kedua metode ini dapat dijelaskan sebagai berikut.

### 1. Tes

Tes dilakukan untuk melihat sejauhmana responden memberikan argumentasi pada suatu konjektur matematika. Responden dipilih seorang mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika semester 2. Dalam tes ini, responden diminta untuk menjawab sebuah konjektur berkenaan dengan materi fungsi kuadrat. Konjektur diambil dari penelitian Bergqvist (2005) yang telah diujikan dan dibuat taksonomi skema buktinya berdasarkan pada Balacheff. Responden kemudian diberi waktu sekitar 20 menit untuk menjawab soal. Agar tidak terjadi persepsi yang salah mengenai soal, peneliti sebelumnya memberikan penjelasan maksud dari soal tersebut tanpa memberi arahan pada jawaban.

Berikut konjektur yang digunakan dalam penyelidikan ini:

***Jika grafik fungsi kuadrat memotong sumbu-x di dua titik, maka ada sebuah titik di antara kedua titik potong tersebut sedemikian sehingga garis singgung pada kurva berbentuk horizontal***

Sedangkan hasil penelitian Bergqvist (2005) pada tiap level skema bukti Balacheff adalah sebagai berikut.

- Level 1:* Saya gambar grafik  $y = x^2 - 3$ . Saya langsung mengerti bahwa saya bisa menggambar sebuah garis singgung horizontal pada kurva. Saya juga bisa melakukannya terhadap grafik  $y = -x^2 + 2$ .

*Level 2:* Jika anda melihat kurva  $y = x^2 + 0,0001x$ , anda bisa mengerti bahwa grafik memotong sumbu- $x$  di dua titik yang sangat berdekatan sehingga menyebabkan garis singgung hampir horizontal di antara kedua perpotongannya. Saya akan memeriksa. Tidak, jika saya memperbesar perpotongan, maka saya bisa mengerti bahwa konjektur itu benar untuk fungsi ini. Hal tersebut bisa menunjukkan kemungkinan benar untuk semua fungsi kuadrat.

*Level 3:* Fungsi kuadrat  $y = ax^2 + bx + c$  memiliki sebuah garis singgung horizontal untuk  $x = -\frac{b}{2a}$ . Fungsi tersebut memotong sumbu- $x$  di kedua sisi pada titik ini pada saat  $y = 0$ . Fungsi kuadrat memiliki penyelesaian  $x = -$

$$\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} .$$

Dengan demikian konjektur itu benar.

*Level 4:* Fungsi kuadrat yang memotong sumbu- $x$  memiliki turunan positif dalam salah satu perpotongan dan hasil negatif pada perpotongan lainnya. Karena turunan dari fungsi tersebut adalah kontinyu, hal itu akan mengasumsikan nilai nol diantara perpotongan.

### 2. Wawancara

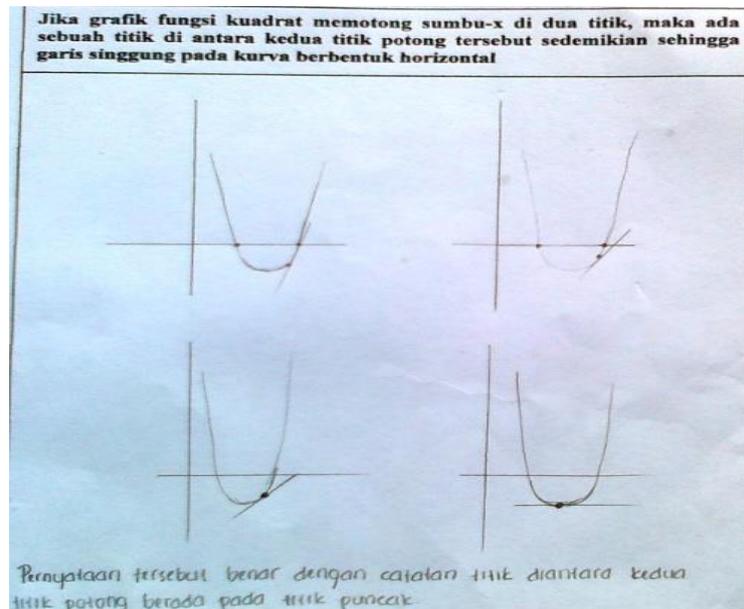
Wawancara dilaksanakan setelah tes. Tujuan dari wawancara ini adalah untuk menggali sejauhmana responden melakukan

verifikasi terhadap argumentasi yang diberikan. Wawancara dilakukan secara mendalam untuk menggali hal-hal yang tidak terduga dan muncul dari persepsi responden. Kendatipun begitu, semua materi dalam wawancara diarahkan untuk

menjawab pertanyaan-pertanyaan penyelidikan yang diajukan. Hasil dari wawancara ini kemudian ditranskrip melalui dialog, seperti yang ditunjukkan pada hasil penyelidikan di bawah.

### **C. HASIL DAN PEMBAHASAN**

Tes dan wawancara dilaksanakan secara serempak pada hari Minggu, 1 Juni 2014 pukul 06.00. Kegiatan diawali dengan tes sekitar 20 menit, kemudian dilanjutkan dengan wawancara. Hasil tes ditampilkan pada gambar di bawah ini.



**Gambar 1. Hasil Tes Konjektur**

Gambar di atas menunjukkan bahwa responden memberikan argumentasi tentang bukti dari konjektur dengan cara merepresentasikannya melalui gambar. Penjelasan gambar dimulai dari gambar yang letaknya dibagian kanan atas. Ia membuat sebuah titik yang dekat dengan titik potong parabola sebelah kanan lalu menggambar garis singgung pada titik itu. Gambar berlanjut pada sebelah kiri atas. Pada gambar kedua ini, responden menggeser titik ke sebelah kiri, lalu menggambar sebuah garis singgung pada titik itu. Gambar selanjutnya berada di sebelah kiri bawah. Ia menggambar titik

pada kurva yang dekat ke titik puncak, kemudian menggambar garis singgung pada titik itu. Pada gambar keempat, ia gambarkan titik pada puncak parabola. Selanjutnya ia menggambar garis horizontal pada titik itu. Sebagai kesimpulan dari uraiannya, ia menyatakan bahwa “pernyataan tersebut benar dengan catatan titik di antara kedua titik potong berada pada titik puncak”.

Sedangkan, petikan dari hasil wawancara ditampilkan sebagai berikut (P menunjukkan peneliti, dan R menunjukkan responden)

P : Apakah Anda paham dengan soal tersebut?

R : Gak tahu, susah... Kayaknya soal tersebut tidak mungkin, salah ya... (*sambil memandang ke Peneliti*)

P : Terserah Anda? Yang penting alasannya ditulis?

R : Tapi... sebentar, saya tahu... (*ia kemudian mengambil soal dan mulai mengerjakan*)

*Responden kemudian mengerjakan soal tersebut, kira-kira 20 menit. Setelah itu kemudian berlanjut dengan wawancara.*

- P : Bagaimana menurut Anda?
- R : Susah, saya tidak yakin dengan jawaban saya.
- P : Kenapa jawabannya seperti itu? Bisa dijelaskan
- R : Karena memotong di dua titik, saya gambarkan seperti ini? (*sambil menunjuk pada gambar*)
- P : Lalu...
- R : Jika titiknya di sini (*sambil menunjuk gambar sebelah kanan atas?*) maka garis singgungnya akan seperti ini. Jika titiknya di sini (*sambil menunjuk gambar sebelah kiri atas*), garis singgungnya akan seperti ini. Jika titiknya di sini (*sambil menunjuk gambar sebelah kiri bawah*), garis singgungnya seperti ini. Jika titiknya di sini (*sambil menunjuk titik puncak parabola pada gambar sebelah kanan bawah*) garis singgungnya seperti ini.
- P : Jadi, kesimpulannya...
- R : Pernyataan itu benar, tapi dengan syarat...
- P : Apa syaratnya?
- R : Titiknya ada di puncak ini (*sambil menunjuk puncak salah satu parabola yang ia gambar*), makanya saya tulis pernyataan seperti itu... (*sambil menunjuk pada pernyataan yang ia buat pada bagian bawah gambar*)
- P : Apakah Anda yakin dengan jawaban Anda?
- R : Saya yakin benar, tapi dengan syarat tadi...
- P : Bagaimana dengan ini? (*Peneliti mengambil jawaban dari penelitian Bergqvist (2005) yang sudah dibuat levelisasi berdasarkan taksonomi skema bukti dari Balacheff*). Menurut Anda mana yang lebih mirip dengan pekerjaan yang Anda buat?
- R : Mirip 1 dan 2
- P : Di antara 1 dan 2 mana yang lebih mirip?
- R : 1
- P : Mana yang lebih Anda sukai, jawaban Anda atau jawaban orang? (*maksudnya jawaban yang ada pada hasil penelitian Bergqvist*)
- R : Jawaban yang di sini. (*Sambil mengacungkan kertas jawaban dari Bergqvist*).
- P : Alasannya...

- R : Kayaknya lebih matematik.
- P : Jika Anda disuruh memilih di antara level 1 sampai level 4, mana yang lebih disukai?
- R : Ke-1 dan ke-3, yang lain *ribet...* (*maksudnya level 1 dan level 3*)
- P : Kenapa ke-1 lebih suka?
- R : Ga tahu, gimana ya...
- P : Menurut Anda, kenapa orang lain mengerjakan seperti cara ke-1 (*maksudnya level 1*)?
- R : Sebenarnya dia paham, garis horizontal itu ada di puncak.
- P : Apakah Anda suka cara ngerjain orang seperti itu?
- R : Ya, jawaban yang ada di sana lebih meyakinkan, sebab lebih matematik
- P : Jika antara 1 dan 3, mana yang lebih Anda suka?
- R : Lebih suka yang 3
- P : Kenapa?
- R : Kalau cara ke-1, dia seperti sudah lebih paham, maka dia langsung menentukan; kalau cara 3 dia nyari dengan proses dulu...

.....

Mencermati hasil tes di atas, nampak bahwa responden memiliki persepsi tersendiri terhadap konjektur yang diberikan. Sebelum ia melihat bukti lain, ia meyakini argumentasinya dengan menunjukkannya melalui representasi gambar. Ia yakin bahwa jika pada suatu fungsi kuadrat dapat digambarkan sebuah garis horizontal, maka hal tersebut akan berlaku untuk semua fungsi kuadrat. Secara tidak langsung, responden telah menunjukkan bahwa garis horizontal yang dimaksud adalah garis yang melalui titik puncak parabola. Ia mempertegas argumentasinya dengan menuliskan bahwa *pernyataan tersebut benar dengan catatan titik di antara kedua titik potong berada pada titik puncak.*

Bila ditelusuri lebih lanjut pada hasil tes, responden ternyata lebih menyukai

menunjukkan suatu konjektur dengan contoh kasus. Menurut Balacheff, cara yang digunakan oleh responden seperti itu termasuk pada kategori *naive empiricism*.

Berbeda dengan hasil tes, hasil wawancara nampaknya mempengaruhi persepsi responden pada argumentasi yang ia berikan. Pada saat ditunjukkan argumentasi lain, responden mulai ragu dengan argumentasinya. Ternyata ia lebih meyakini argumentasi lain yang dianggapnya lebih meyakinkan dan lebih matematik. Hal yang menarik untuk dicermati karena sesuai dengan temuan Liu (2013) bahwa subyek cenderung tidak dapat mempertahankan argumentasinya manakala ia memperoleh argumentasi lain yang menurutnya lebih benar. Keraguan ini sangat nampak manakala responden kemudian diminta untuk memilih mana

diantara cara-cara pada level 1, level 2, level 3 dan level 4 yang lebih disukai. Responden ternyata lebih menyukai cara pembuktian yang ditunjukkan pada level 3 (cara aljabar). Sangat kontras dengan apa yang ia lakukan sebelumnya, yang membuktikan suatu konjektur dengan merepresentasikan pada suatu contoh kasus melalui representasi geometris.

Kecenderungan responden lebih menyukai cara-cara aljabar menunjukkan bahwa responden lebih menyukai berkerja pada level bernalar tingkat tinggi. Seperti apa yang diungkapkan oleh Bergqvist (2005) dalam studinya, ia menemukan kebanyakan siswa lebih suka bekerja pada aljabar yang menurut taksonomi dari Balacheff (1988) termasuk kategori penalaran matematis tingkat tinggi.

Hasil temuan semacam ini, tentu belum bisa digeneralisasi menjadi

#### D. KESIMPULAN DAN SARAN

Dengan mengacu pada hasil penyelidikan dan pembahasan di atas, dapat diungkapkan simpulan sebagai berikut.

1. Berdasarkan taksonomi skema bukti Balacheff, responden berada pada level *naive empiricism*. Pembuktian suatu konjektur ditunjukkan dengan merepresentasikan suatu kasus yang disimpulkan menjadi kasus yang umum.

kesimpulan yang berlaku umum, mengingat sampel yang diambil hanya satu sampel saja. Namun demikian, hal menarik yang bisa diungkapkan dari hasil penyelidikan ini, memunculkan fenomena yang seragam seperti apa yang diungkapkan oleh Liu dan Bergqvist. Akan tetapi, karena tes dan wawancara dilakukan secara spontan, mungkin saja ada faktor-faktor lain yang diabaikan.

Penelusuran lebih lanjut sebenarnya bisa dilakukan dengan memperbanyak responden dan juga mengaitkannya dengan kemampuan awal yang dimiliki responden. Dalam hal ini sangat dimungkinkan *treatment* diberikan, sehingga patut diduga bahwa dalam kondisi tertentu responden cenderung akan mempertahankan argumentasi yang ia berikan.

2. Sesuai dengan temuan Liu (2013), responden cenderung tidak bertahan pada argumentasinya. Responden lebih memilih argumentasi lain yang menurutnya lebih meyakinkan dan lebih matematis.
3. Berdasarkan pada taksonomi skema bukti dari Balacheff, responden lebih menyukai cara-cara aljabar yang menurut Balacheff termasuk kategori penalaran matematis tingkat tinggi.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Balacheff, N. (1988). *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics*. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216–235). London: Hodder and Stoughton.
- Bell, A.W. (1976). *A study of pupils' proof-explanations in Mathematical situations*. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1-2), 23-40
- Bergqvist. 2005. *How Students Verify Conjectures: Teachers' Expectation*. *Journal of Mathematics Teacher Education* (2005) 8:171–191.
- Depdiknas. 2006. *Standar Isi Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan*. Jakarta: Depdiknas
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). *Students' proof schemes: Results from exploratory studies*. In A. H. Schoenfeld, Kaput, J., & Dubinsky,

- E. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234-283). American Mathematical Society
- Liu, Yating. 2013. *Aspects of Mathematical Argumentasits that Influence Eighth Grade Students' Judgment of Their Validity*. Dissertation at The Ohio University, Ohio.
- van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York: Academic Press.