TEOREMA AMPLOP DAN DUALITAS

The Structure of Economics, Silberberg

Tony S. Chendrawan
Universitas Sultan Ageng Tirtayasa
tony@untirta.ac.id

Abstrak

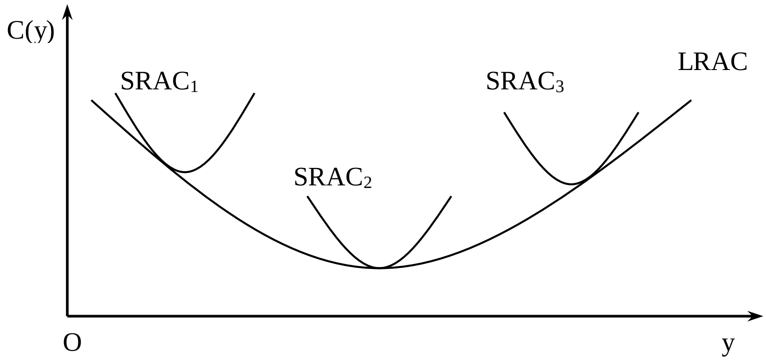
Economic model is a theoretical construction or economic analysis framework consisting of a set of concepts, definitions, assumptions, equations, similarities (identities) and inequalities from which conclusions will be derived. Duality theory is one of the important and interesting concepts of linear programs in terms of theory and practice, the background is that every linear problem of programming, always has a second problem which is always related to the first problem. The first problem is called Primal and the second problem is called Dual. The two problems are always related in such a way that the optimal solution to the first problem will provide complete information about the optimal solution to the second problem. The relationship between the original model problem (called the "primal form") and its dual form is very useful for various things, especially its economic interpretation. The dual form of the dual form is a primal form, the following will be discussed the benefits, general comparative static analysis, dual-primal analysis, and interpretation of the lagrangian multiplier.

Keyword: Advantages Function; General Static Comparative Analysis; Dual-Primal Analysis

PENDAHULUAN

SEJARAH PERMASALAHAN

Pada awal tahun 1930-an seorang ekonom terkenal, Jacob Viner, menganalisis perilaku perusahaan dalam jangka pendek dan jangka panjang. Viner mendefinisikan "jangka pendek" sebagai periode waktu dimana satu faktor produksi, misalnya kapital, adalah tetap sedangkan faktor lain, misalnya tenagakerja, adalah variabel. Dia menggambarkan suatu seri kurva-kuva biaya jangka pendek yang memiliki titik minimum (berurutan dari input tetap terkecil sampai terbesar) pada awalnya akan turun dan kemudian naik. Viner beralasan jika kedua input variabel, biaya rata-rata jangka panjang akan selalu lebih kecil atau sama dengan biaya rata-rata jangka pendek. Oleh karena itu dia berkesimpulan bahwa kurva biaya rata-rata jangka panjang digambarkan sebagai "amplop" untuk semua kurva biaya rata-rata jangka pendek. Pada akhirnya kurva amplop digambarkan seperti pada Gambar sebagai berikut :



Gambar 1 . Diagram Viner-Wong modern memperlihatkan kurva biaya rata-rata jangka panjang sebagai kurva amplop terhadap kurva-kurva biaya rata-rata jangka pendek.

Walaupun demikian, Viner merasa kebingungan dengan fakta bahwa kurva biaya rata-rata jangka panjang tidak melewati titik minimum kurva biaya rata-rata jangka pendek, padahal pengurangan biaya akan meningkatkan keuntungan. Lebih jauh, pada titik singgung kedua kurva, kemiringan kurva biaya rata-rata jangka panjang dan kurva biaya rata-rata jangka pendek adalah sama, yang berarti biaya rata-rata akan turun (atau naik) dengan besaran yang sama terlepas dari salah satu input (kapital) dianggap tetap atau tidak. Viner kemudian meminta pada juru gambarnya, Wong, untuk menggambar kurva biaya rata-rata jangka panjang sebagai kurva yang melewati titik-titik minimum dari kurva-kurva biaya rata-rata jangka pendek. Ketika Wong menerangkan kemustahilan untuk gambar tersebut, Viner memilih untuk menggambar kurva biaya rata-rata jangka panjang yang melewati titk-titik minimum dari kurva-kurva biaya rata-rata jangka pendek daripada menggambarkannya sebagai kurva amplop. Keputusan ini kemudian memicu ego dari banyak ekonom.

Masalah tersebut kemudian segera dianalisis secara aljabar oleh Paul Samuelson, yang membuktikan kebenaran mengenai kemiringan yang sama antara kurva biaya rata-rata jangka panjang dan jangka pendek. Walaupun demikian, penjelasan tersebut masih menyisakan kebingungan mengenai tingkat perubahan yang sama dari fungsi biaya dimana salah satu input dianggap konstan pada fungsi biaya jangka pendek dan dianggap variabel pada fungsi biaya jangka panjang. Mungkin sangat mengejutkan, ketika para ekonom meneliti masalah ini lebih jauh, ditemukan bahwa hubungan yang mendasari "teorema amplop" merupakan teori dasar tentang adanya teorema komparatif statik yang dapat ditolak (*refutable*). Ini adalah isu besar yang akan kita bahas.

FUNGSI KEUNTUNGAN

Samuelson memulai analisisnya dengan sebuah model maksimisasi dengan dua variabel keputusan yaitu x_1 dan x_2 dan satu paramenter yaitu α :

$$y = f\,(x_1, x_2, \alpha)$$

Syarat kondisi order pertama adalah : $f_1 = f_2 = 0$. Jika diasumsikan syarat kondisi order kedua terpernuhi maka fungsi eksplisit dari x adalah : $x_i = x_i^*(\alpha)$ yang diturunkan dari penyelesaian persamaan kondisi order pertama. Jika x_i dimasukan kedalam persamaan fungsi objektif maka diperoleh :

$$\phi(\alpha) = f\,[x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha), (\alpha)]$$

Fungsi $\phi(\alpha)$ adalah nilai dari fungsi objektif f dimana x_i memaksimumkan f (untuk nilai α tertentu). Oleh karena itu $\phi(\alpha)$ merepresentasikan nilai maksimum dari f untuk setiap nilai α. Kita menyebut $\phi(\alpha)$ sebagai fungsi objektif *indirect.*

Bagaimana variasi ϕ (dibandingkan dengan f) ketika α bervariasi? Besarnya adalah hasil diferensiasi terhadap α :

$$\phi_\alpha(\alpha) = f_1 \frac{dx_1^*}{d\alpha} + f_2 \frac{dx_2^*}{d\alpha} + f_\alpha$$

Karena syarat dari kondisi order pertama $f_1 = f_2 = 0$ maka dua suku pertama sisi kanan persamaan menjadi hilang sehingga :

$$\phi_\alpha(\alpha) = f_\alpha$$

Persamaan (2) menunjukan bahwa jika α berubah, tingkat perubahan dari nilai maksimum f , dimana x_1 dan x_2 bervariasi pada tingkat optimalnya seiring dengan variasi α, sama dengan tingkat perubahan f seiring dengan variasi α ketika x_1 dan x_2 konstan. Hasil ini membingungkan banyak ekonom dalam jangka lama setelah publikasi artikel Viner.

Sebelum kita mempelajari geometri persamaan (2), mari kita verifikasi model maksimisasi keuntungan. Fungsi permintaan faktor yang memaksimumkan $\pi = p\,f\,(x_1,x_2) - w_1x_1 - w_2x_2$ adalah : $x_1 = x_1^*\,(w_1, w_2, p)$, $x_2 = x_2^*\,(w_1, w_2, p)$. Jika tingkat input yang memaksimumkan keuntungan tersebut disubstitusikan pada fungsi objektif, maka tingkat keuntungan, menurut definisi, berada pada tingkat maksimum pada tingkat penggunaan input dan harga tersebut. Secara matematik ditulis :

$$\pi^* (w_1, w_2, p) = p\, f\, (x_1^*, x_2^*) - w_1x_1^* - w_2x_2^* \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Fungsi $\pi^*(w_1, w_2, p)$ disebut fungsi keuntungan, yang merupakan fungsi objektif *indirect* untuk model tersebut. Nilainya akan selalu merupakan nilai maksimum keuntungan pada tingkat w_1, w_2 dan p tertentu.

Bagaimana variasi keuntungan ketika, misalnya w_1, berubah? Maka dapat dilakukan diferensiasi fungsi objektif terhadap w_1, dengan meperlakukan tidak hanya harga tetapi input x_1 dan x_2 tetap. Pada kasus ini diperoleh :

$$\frac{d\pi}{dw_1} = -x_i$$

Tidak ada asumsi keuntungan diberlakukan disini. Hubungan ini menyatakan, misalnya, jika perusahaan mempekerjakan 100 pekerja dan jika upah naik misalnya $ 1, maka keuntungan akan mulai menurun sebesar $ 100 (100 pekerja dikali $1). Walaupun demikian, untuk maksimisasi keuntungan perusahaan akan mulai mengu-rangi jumlah tenagakerja jika upah naik. Jika kita ingin mengevaluasi bagaimana

variasi keuntungan maksimum ketika w_1 berubah, kita harus mendiferensiasi fungsi keuntungan *indirect.* Diferensiasi persamaan (3) terhadap w_1 adalah :

$$\frac{\partial\pi^*}{\partial w_1} = p\left(f_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} + f_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}\right) - w_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} - x_1^* - w_1 \frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}$$

Kombinasi $\partial x_i^*/\partial w_1$ dan seterusnya menghasilkan :

$$\frac{d\pi^*}{dw_1} = (p\, f_1 - w_1) \left(\frac{dx_1^*}{dw_1}\right) + (p\, f_2 - w_2) \left(\frac{dx_2^*}{dw_1}\right) - x_1^*$$

Karena parameter pada sisi kanan persamaan bernilai nol saat keuntungan maksimum pada nilai x_1 dan x_2, sehingga :

$$\frac{\partial\pi^*}{\partial w_1} = -x_1^* = \frac{\partial x}{\partial w_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

dimana suku terakhir harus dievaluasi sebagai x_1^*. Persamaan (4) menunjukan bahwa pada tingkat penggunaan input tertentu, tingkat perubahan *instantaneous* dari keuntungan terhadap perubahan harga faktor adalah sama baik ketika faktor dianggap tetap atau variabel. Lebih jauh, tingkat perubahan *instantaneous* bernilai negatif dalam fungsi permintaan faktor untuk x_1, $x_1 = x_1^*(w_1, w_2, p)$, pada harga disaat tingkat peng-gunaan input memaksimumkan keuntungan.

Kita dapat memperoleh pemahaman yang lebih baik mengenai apa yang terjadi dengan mempertimbangkan gambar geometri lebih detil. Anggap faktor dan harga output berada pada nilai tertentu yaitu w_1^0, w_2^0, p^0. Maka nilai x_1^* dan x_2^* adalah :

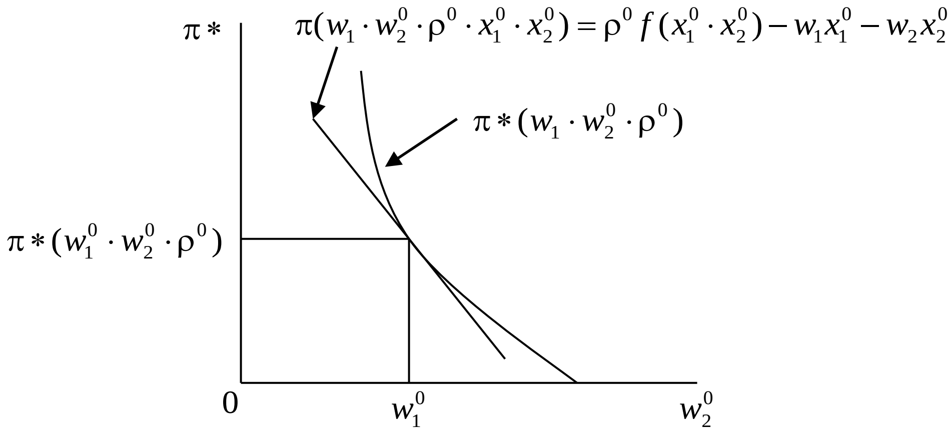
$$x_1^0 = x_1^*(w_1^0, w_2^0, p^0), \quad x_2^0 = x_2^*(w_1^0, w_2^0, p^0)$$

Mari kita perlakukan w_1 bervariasi, sementara w_2 dan p tetap, dan amati bagaimana variasi keuntungan. Disisi lain kita juga menganggap x_1 dan x_2 tetap pada tingkat x_1^0 dan x_2^0. Dalam Gambar 2, fungsi keuntungan terkendala adalah :

$$\pi(w_1, w_2^0, p^0, x_1^0, x_2^0) = p^0 f(x_1^0, x_2^0) - w_1 x_1^0 - w_2^0 x_2^0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

memperlihatkan tingkat keuntungan ketika w_1 berubah, sementara variabel lain dianggap konstan. Juga catat bahwa $\pi(w_1, w_2^0, p^0, x_1^0, x_2^0)$ adalah fungsi linier terhadap w_1 dengan kemiringan $d\pi/dw_1 = -x_1^0$

Sekarang pertimbangkan hubungan fungsi keuntungan $\pi_1^*(w_1, w_2^0, p^0)$ dengan fungsi keuntungan diatas. Karena $\pi_1^*(w_1, w_2^0, p^0)$ menurut definisi adalah keuntungan maksimum untuk tingkat penggunaan faktor dan harga output tertentu, maka seharusnya kurvanya digambarkan diatas kurva keuntungan $\pi(w_1, w_2^0, p^0, x_1^0, x_2^0)$. Bagaimanapun pada saat $w_1 = w_1^0$, penggunaan input berada pada tingkat yang memaksimumkan keuntungan karena x_1^0 dan x_2^0 didefinisikan sebagai tingkat penggunaan input yang memaksimumkan keuntungan pada saat $w_1 = w_1^0$ sehingga pada $w_1 = w_1^0$, $\pi^*(w_1, w_2^0, p^0) = \pi(w_1, w_2^0, p^0, x_1^0, x_2^0)$. Dan jika $w_1 \neq w_1^0$, tingkat penggunaan input x_1^0 dan x_2^0 menjadi tidak optimum karena sekarang tidak memaksimumkan keuntungan. Dengan demikian $\pi^*(w_1, w_2^0, p^0) > \pi(w_1, w_2^0, p^0, x_1^0, x_2^0)$ pada kedua sisi dari w_1^0. Bentuk geometrisnya terlihat pada Gambar 2. Dengan mengasumsikan π^* dan π dapat didiferensiasi, π^* dan π harus bersinggungan pada saat w_1^0. Persinggungan tersebut menunjukan kedua kurva memiliki kemiringan yang sama pada w_1^0. Kondisi ini digambarkan oleh persamaan (4) yaitu $d\pi^*/dw_1 = d\pi/dw_1 = -x_1^*$.



Gambar 2 Fungsi keuntungan π*(w_1, w_2^0, p^0) dan fungsi keuntungan π(w_1^0, w_2^0, p^0, x_1^0, x_2^0) dimana x_1^0 dan x_2^0 adalah tingkat penggunaan input yang memberikan keuntungan maksimum pada saat $w_1 = w_1^0$.

Mari kita bahas kondisi pada nilai w_1 yang lain misalnya w_1^1. Pada kasus ini kita memperlakukan x_1 dan x_2 tetap yang merupakan tingkat penggunaan input optimum pada saat w_1^1 yaitu : $x_1^1 = x_1*(w_1^1, w_2^0, p^0)$ dan $x_2^1 = x_2*(w_1^1, w_2^0, p^0)$. Hasil maksimisasi keuntungan terkendala menghasilkan persinggungan dengan π* pada nilai w_1 yang berbeda, kemiringan pada titik tersebut adalah : $-x_1*(w_1^1, w_2^0, p^0)$. Kita dapat melihat alasan dari nama teorema “amplop” : fungsi keuntungan $\pi*(w_1, w_2, p)$ merupakan amplop bagi semua kurva-kurva keuntungan terkendala yang mungkin ketika w_1 bervariasi.

Bagaimanapun, kita memiliki lebih banyak informasi dari sekedar kemiringan yang sama antara π dan π*. Karena π* terletak diatas π di kedua sisi w_1^0, maka $\pi*(w_1, w_2^0, p^0)$ seharusnya lebih *convex* (atau kurang *concave*) daripada π (w_1, w_2^0, p^0, x_1^0, x_2^0). Tetapi dalam model ini, π adalah linear sehingga $\pi*(w_1, w_2^0, p^0)$ harus *convex* di w_1 seperti terlihat pada Gambar 2. Fakta bahwa fungsi *indirect* adalah *convex* memberikan konsekuensi besar dalam komparatif statik model ini. Conveksitas dalam w_1 berarti $d^2\pi*/dw_1^2 \geq 0$. Tetapi dari persamaan (4), $d^2\pi*/dw_1^2 = -x_1*(w_1, w_2, p)$. Diferensiasi kedua sisi persamaan tersebut menghasilkan :

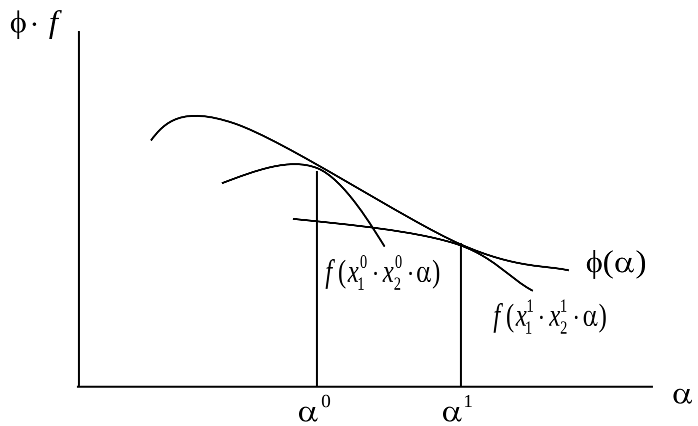
$$\frac{d^2\pi*}{dw_1^2} = -\frac{dx_1*}{dw_1} \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (6)$$

Karena fungsi permintaan faktor $x_1*(w_1, w_2, p)$ yang merupakan turunan parsial pertama dari $\pi(w_1, w_2, p)$ terhadap w_1 bernilai negatif, maka kemiringan fungsi permintaan faktor (turunan pertama persamaan tersebut terhadap w_1) yang merupakan turunan kedua dari π^* terhadap w_1 bernilai negatif. Jika turunan kedua dari π^* bernilai positif (nonegatif), kemiringan fungsi permintaan faktor harus negatif. Oleh karena itu, bentuk kurva dari fungsi objektif *indirect* (fungsi keuntungan) kemudian menghasilkan konsep komparatif statik yang penting.

By symmetry, hal ini diikuti oleh $\pi^*(w_1, w_2, p)$ yang *convex* pada w_2, yang menghasilkan komparatif statik yang sama untuk faktor tersebut. Kondisi ini juga menyebabkan $\pi^*(w_1, w_2, p)$ *convex* terhadap harga output p sehingga $d^2\pi^*/dp^2 = dy^*/dp \geq 0$. Bukti dan penjelasan geometris mengenai hal ini ditinggalkan untuk latihan siswa. Kini kita kembali untuk menguji model maksimisasi umum. Dapatkah penjelasan diperoleh tanpa membahas geometri visual ?

ANALISIS UMUM KOMPARATAIF STATIK : MODEL TANPA KENDALA

Sekarang analisis maksimisasi $y = f(x_1, x_2, \alpha)$ dilakukan dengan menganggap x_1 dan x_2 sebagai variabel pilihan dan α sebagai kendala. Kondisi order pertama adalah $f_1 = f_2 = 0$. Dengan membuat penyelesaian secara simultan terhadap syarat kondisi order pertama maka diperoleh $x_1 = x_1^*(\alpha)$ dan $x_2 = x_2^*(\alpha)$. Lagi-lagi, ada proposisi yang dapat ditolak sebagai implikasi dari maksimisasi yaitu mengenai arah perubahan beberapa atau semua x_i jika α berubah. Fungsi objektif *indirect* adalah : $\phi(\alpha) = f\,[x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha), (\alpha)]$. Menurut definisi, $\phi(\alpha)$ memberikan nilai maksimum bagi f untuk α tertentu. Bagaimana variasi $\phi(\alpha)$ dan $f(x,\alpha)$ jika α berubah ?



Gambar 3 Fungsi objektif *indirect* $\phi(\alpha)$ adalah kurva amplop bagi fungsi objektif *direct* untuk berbagai variasi α.

Pada Gambar 3, $\phi(\alpha)$ diplot untuk berbagai variasi α. Untuk nilai α^0 yang berubah-ubah diperoleh beberapa nilai $x_1^0 = x_1^*(\alpha^0)$ dan $x_2^0 = x_2^*(\alpha^0)$. Kini pertim-bangkan perilaku $f(x_1, x_2, \alpha)$ ketika x_1 dan x_2 dianggap konstan pada tingkat x_1^0 dan x_2^0 sebagai kebalikan dari kondisi disaat x_1 dan x_2 dianggap variabel. Karena $\phi(\alpha)$ memberika nilai maksimum bagi f untuk α tertentu maka dapat ditulis $f \leq \phi$. Ketika $\alpha=\alpha^0$ maka diperoleh nilai x_i dan juga $f(x_1, x_2, \alpha)$ pada tingkat tersebut. Disisi lain pada nilai α^0 lainnya diperoleh nilai x_1 yang "salah" (karena bukan maksimisasi), dan menurut definisi, $f(x_1^0, x_2^0, \alpha) < \phi(\alpha)$ di sekitar nilai α^0. Kecuali jika f tidak terdiferensiasi pada α^0, ϕ dan f akan bersinggungan pada α^0, dan lebih jauh, f harus lebih *concave* atau kurang *convex* dibandingkan ϕ. Karena nilai α berubah-ubah, maka persinggungan harus terjadi pada nilai α lainnya Pada diagram 3 terlihat bahwa $\phi(\alpha)$ merupakan amplop bagi $f(x_1, x_2, \alpha)$ untuk setiap tingkat α. Bagaimana kita menurunkan keadaan ini secara aljabar ?

Pertimbangkan sebuah fungsi baru yaitu perbedaan antara nilai aktual dan nilai maksimum dari f untuk α tertentu :

$$F(x_1, x_2, \alpha) = f(x_1, x_2, \alpha) - \phi(\alpha)$$

Persamaan diatas disebut fungsi objektif primal-dual. Karena $f \leq \phi$ untuk $x \neq x^*$ dan $f = \phi$ untuk $x_i = x_i^*$, maka F memiliki nilai maksimum ketika $x_i = x_i^*(\alpha)$. Lebih jauh kita dapat mempertimbangkan $F(x_1, x_2, \alpha)$ sebagai fungsi dari tiga variabel bebas x_1, x_2, dan α. Maka akan diperoleh : untuk α tertentu akan terdapat nilai x_1 dan x_2 yang memaksimumkan f dan untuk nilai x_1 dan x_2 tertentu, terdapat beberapa nilai α yang membuat nilai x_i benar (karena menyebabkan maksimisasi). Sebagai contoh, pada tingkat penggunaan kapital dan tenagakerja tertentu, terdapat beberapa set penggunaan faktor dan harga output yang akan menghasilkan keuntungan maksimum.

Posisi maksimum dari $F(x_1, x_2, \alpha)$ dapat digambarkan, seperti biasanya, dengan memenuhi kondisi order pertama dan kondisi order kedua. Kondisi order pertama adalah turunan parsial dari $f(x_1, x_2, \alpha) - \phi(\alpha)$ terhadap x_1, x_2 dan α bernilai nol :

$$F_i = f_i = 0 \quad i=1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

dan

$$F_\alpha = f_\alpha - \phi_\alpha = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Persamaan 7 adalah kondisi maksimum orijinal. Sedangkan persamaan 8 adalah hasil dari "amplop" dimana $\phi_\alpha = f_\alpha$. Kondisi order pertama terjpenuhi ketika $x_i = x_i^*(\alpha)$, i=1,2.

Kondisi order kedua mensyaratkan bahwa matriks Hessian hasil turunan kedua dari $F(x_1, x_2, \alpha)$ (terhadap x_1, x_2 dan α) memiliki definit negatif. Dengan membuat $F_{11} = f_{11}$ dan seterusnya, dan $F_{\alpha\alpha} = f_{\alpha\alpha} - \phi_{\alpha\alpha}$ maka :

$$H = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{1\alpha} \\ F_{21} & F_{22} & F_{2\alpha} \\ F_{\alpha 1} & F_{\alpha 2} & F_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1\alpha} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2\alpha} \\ f_{\alpha 1} & f_{\alpha 2} & f_{\alpha\alpha} - \phi_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Syarat kondisi order kedua adalah $f_{11} < 0$, $f_{11}f_{22} - f^2_{12} > 0$. Tambahannya, syarat kondisi order kedua juga harus memenuhi : $F_{\alpha\alpha} < 0$ atau $f_{\alpha\alpha} - \phi_{\alpha\alpha} < 0$. Lebih jauh, dari hasil ketidaksamaan tersebut nilai-nilai komparatif statik (dalam model maksimisasi) akan muncul.

Syarat kondisi amplop order pertama dari persamaan 8 adalah : $\phi_\alpha(\alpha) \equiv f_\alpha[x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha), \alpha]$. Diferensiasi kedua sisi persamaan tersebut terhadap α mengha-silkan :

$$\phi_{\alpha\alpha} \equiv f_{\alpha x1} \frac{dx_1^*}{d\alpha} + f_{\alpha x2} \frac{dx_2^*}{d\alpha} + f_{\alpha\alpha}$$

Dari kondisi order kedua, dengan menggunakan teorema Young's diperoleh :

$$\phi_{\alpha\alpha} - f_{\alpha\alpha} = f_{1\alpha} \frac{dx_1^*}{d\alpha} + f_{2\alpha} \frac{dx_2^*}{d\alpha} > 0$$

Analisis diatas digeneralisasi untuk seluruh n variabel akan menghasilkan kondisi :

$$\Sigma\ f_{i\alpha} \frac{dx_i^*}{d\alpha} > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (10)$$

Persamaan (10) merupakan persamaan umum dan fundamental dari komparatif statik untuk semua model maksimisasi tanpa kendala. Seperti terlihat dari bentuknya, persamaan tersebut terlalu umum untuk banyak penggunaan. Untuk model yang memiiliki implikasi dapat ditolak (*refutabel*), model harus mengandung lebih banyak struktur daripada sekedar masalah maksimisasi umum. Oleh karena itu anggap beberapa variabel α masuk dalam kondisi order pertama $f_i = 0$, $f_{i\alpha}= 0$ untuk $j \neq i$. Kemudian persamaan 10 dikurangi oleh satu suku :

$$f_{i\alpha} \frac{dx_i^*}{d\alpha} > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (11)$$

Hasil ini adalah conjugate pairs Samuelson yang terkenal. Pada model maksimasi, jika beberapa parameter α hanya pada persamaan turunan pertama (FOC) yang ke i, sebagai respon dari i pilihan variable xi terhdap perubahan pada parameter itu.

Significansi teori ini diletakkan pada aplikasinya terhadap beberapa model penting. Contoh, pada model meksimasi laba, parameter w_1 dimasukkan hanya persamaan pertama FOC: $\pi = pf_1 - w_1 = 0$, sehingga: $\delta\pi_1/\delta w_1 = -1$. Dengan demikian teori pasangan conjugate menyatakan bahwa respon x_1^* terhadap kenaikan w_1 bersifat negative, demikian pula untuk x_2^*.

Pada kasus yang lebih umum dimana x adalah suatu vector variable keputusan (x_1... xn), dan α adalah vector parameter $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_m)$, SOC untuk memaksimumkan F (x, α) = f (x- α) – Φ(α) dengan perubahan terhadap α matrik $F\alpha\alpha = f\alpha\alpha - \Phi\alpha\alpha$. Pilihan tanda *(sign)* diperoleh dari prinsip minor pada $f\alpha\alpha - \Phi\alpha\alpha$.

Teori kurva amlpop juga menyatakan syarat resiprokal non-intuisi yang memaksimumkan model. Kembali ke model maksimisasi laba, kita menurunkan $\delta x_1^*/\delta w_2 = \delta x_2^*/\delta w_1$. Hasil ini menjadi lebih jelas dengan mencatat setiap permintaan factor dengan menunjukkan turunan parsial negative dari π* terhadap factor harga. Jadi $\pi_1^* = -\ x_1^*$ (w_1, w_2, p) ; $\pi_2^* = -\ x_2^*$ (w_1, w_2, p). Penerapan Teori Young invariant parsial silang terhadap π* (w_1, w_2, p) menghasilkan $\pi_{12}^* = -\delta x_1^*/\delta w_2 = -\delta x_2^*/\delta w_1 = \pi_{21}^*$.

Semua teorema reciprocal pada kenyataannya merupakan aplikasi sederhana dari Teori Young terhadap fungsi obyektif secara tidak langsung. Andaikan ada dua variavel α dan β dalam model, maka menjadi maksimasi y = f (x_1, x_2, α, β). Imlpikasi fungsi pilihan menjadi $x_i = x_i^*$(α, β), i = 1, 2, dan fungsi obyektif tidak langsung adalah Φ (α,β) = f [x_1^*(α,β)], x_2^*(α,β).

Selanjutnya ditulis bahwa Φ (α,β) = fα.
Maka:

$$\Phi_{\alpha,\beta}\,(\alpha,\beta) = f_{\alpha 1}\,\frac{\delta x_1^*}{\delta\beta} + f_{\alpha 2}\,\frac{\delta x_2^*}{\delta\beta} + f_{\alpha,\beta}$$

$$\Phi_{\beta\alpha}\,(\alpha,\beta) = f_{\beta 1}\,\frac{\delta x_1^*}{\delta\alpha} + f_{\beta 2}\,\frac{\delta x_2^*}{\delta\alpha} + f_{,\beta\alpha}$$

Karena: $\Phi_{\alpha,\beta} = \Phi_{\beta\alpha}$ maka menjadi persamaan (12):

$$f_{\alpha 1}\frac{\delta x_1^*}{\delta\beta} + f_{\alpha 2}\frac{\delta x_2^*}{\delta\beta} = f_{\beta 1}\frac{\delta x_1^*}{\delta\alpha} + f_{\beta 2}\frac{\delta x_2^*}{\delta\alpha}$$

Secara umum jika terdapat n variable keputusan, maka persamaan menjadi (13):

$$\Sigma\, f_{i\alpha}\frac{\delta x_i^*}{\delta\beta} = \Sigma\, f_{i\beta}\frac{\delta x_i^*}{\delta\alpha}$$

Hubungan ini menjadi sangat penting bilamana setiap parameter yang dimasukkan satu persamaan FOC. Pada kasus persamaan (13) mereduksi terhadap satu bagian pada setiap satu sisi persamaan, sama halnya pada model maksimisasi laba.

MODEL DENGAN KENDALA

Sebagian besar model pada ekonomi mencakup satu atau lebih kendala. Suatu model penting yang biasa ditemukan, misalnya adalah:

Minimisasi:

$$C = \Sigma\, w_i x_i$$

Dengan kendala:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = y^o$$

Jika f adalah suatu fungsi produksi dari n input, $x_1, \ldots, x_n$ dan w_i adalah harga factor, maka hal ini menggambarkan pencapaian tujuan pada level output y^o pada biaya yang mimimum.

Pengembangan model maksimisasi dari model tanpa-kendala kepada model dengan satu atau lebih kendala, sangat tergantung pada dimasukkannya parameter ke dalam fungsi obyektif atau dimasukkannya kendala. Dapat dicatat bahwa model minimasi biaya sebelumnya, harga dimasukkan hanya pada fungsi obyektif, dimana tingkat output tertentu merupakan kendalanya. Kini akan ditunjukkan bahwa jika parameter yang dimasukkan hanya pada fungsi obyektif, perbandingan static *(comparative static)* yang dihasilkan adalah sama halnya untuk model tanpa-kendala. Bagaimanapun juga, jika parameter yang dimasukkan adalah suatu kendala, sebagai yang mengubah parameter, maka kendala juga berubah, yang akan mengubah hubungan $\Phi_{\alpha\alpha} \geq f_{\alpha\alpha}$.

Derivasi tradisional dari teorema kurva amplop untuk model dengan satu kendala, prosesnya sebagai berikut.

Maksimisasi:

$$f(x_1, \ldots, x_n, \alpha) = y$$

Dengan kendala:

$$g(x_1, \ldots, x_n, \alpha) = y$$

Lagrangian adalah $\mathcal{L} = f + \lambda g$

Turunan pertama parsial terhadap $\mathcal{L} = 0$,

Menghasilkan persamaan (14),

$$\mathcal{L}i = fi + \lambda gi = 0 \rightarrow i = 1, \ldots, n$$

Dan persamaan (15).

$$\mathcal{L}_\lambda = g = 0$$

Penyelesaian kedua persamaan ini:

$$xi = x_i^*(\alpha) \rightarrow i = 1, \ldots, n$$

$$\lambda = \lambda^*(\alpha)$$

Didefinisikan menjadi persamaan (16):

$$y^* = f(x_1^*, \ldots, x_n^*, \alpha) = \Phi(\alpha)$$

Dalam hal ini, $\Phi(\alpha)$ adalah nilai maksimum y untuk α dan x_i yang memenuhi kendala. Lalu bagaimana mungkin $\Phi(\alpha)$ berubah ketika α berubah? Hal demikian karena mendefresiasi persamaan (16) terhadap α. Dan menghasilkan persamaan (17):

$$\frac{\delta \phi}{\delta \alpha} = \Sigma f_i \frac{\delta x_i^*}{\delta \alpha} + f_\alpha$$

Dimana $f_i \neq 0$, dan turunan terhadap kendala:

$$g = [x_1^*(\alpha), \ldots, x_n^*(\alpha).\alpha] \equiv 0$$

Turunan terhadap α menghasilkan persamaan (18):

$$\Sigma g_i \frac{\delta x_i^*}{\delta \alpha} + g_\alpha \equiv 0$$

Selanjutnya persamaan (18) dikalikan dengan λ, lalu tambahkan dengan persamaan (17), sehingga:

$$\frac{\delta \phi}{\delta \alpha} = \Sigma f_i \frac{\delta x_i^*}{\delta \alpha} + f_\alpha + \Sigma \lambda g_i \frac{\delta x_i^*}{\delta \alpha} + \lambda g_\alpha$$

$$= \Sigma (f_i + \lambda g_i) \frac{\delta x_i^*}{\delta \alpha} + f_\alpha + \lambda g_\alpha$$

Dengan menggunakan FOC diperoleh persamaan (19):

$$\frac{\delta \phi}{\delta \alpha} = f_\alpha + \lambda g_\alpha = \mathcal{L}_\alpha$$

Dimana $\mathcal{L}_\alpha$ adalah turunan parsial dari fungsi Lagrangian terhadap α, dengan berpegang bahwa x_i adalah tetap. Selanjutnya dalam mengevaluasi respon dari fungsi obyektif tidak langsung terhadap suatu perubahan pada parameter dalam model maksimisasi terkendala, peran fungsi Lagrangian analog terhadap fungsi obyektif pada model tanpa-kendala.

Kita dapat menurunkan teorema kurva amplop untuk model maksimisasi terkendala lebih khusus dengan menggunakan **analisa dual-primal**. Hal ini tetap berlaku pada kasus model ini, bahwa $\Phi(\alpha) \geq f(x1, \ldots, xn, \alpha)$, tetapi pada kasus ini variable-variablenya harus tetap memenuhi kendala. Karenyanya model dual-primal:

Maksimisasi:

$$f(x_1, \ldots, x_n, \alpha) - \Phi(\alpha)$$

Dengan kendala:

$$g(x_1, \ldots, x_n, \alpha) = 0$$

dengan memperlakukan α sebagai suatu (vector dari) variable keputusan sebagaimana halnya x_i.

Lagrangian untuk masalah dual-primal adalah:

$$\mathcal{L} = f(x_1, \ldots, x_n, \alpha) - \Phi(\alpha) + \lambda g(x_1, \ldots, x_n, \alpha)$$

Turunan partial pertama (FOC) dari $\mathcal{L}$ didudukkan terhadap x_i dan $\lambda = 0$ untuk menghasilkan persamaan turunan pertama biasa untuk suatu maksimisasi terkendala. Turunan pertama dari $\mathcal{L}$ terhadap $\alpha = 0$ menghasilkan hubungan (kurva) amplop (seperti persamaan 19) di atas.

Perbandingan Statics: Analisis Dual-Primal

Saatnya kini untuk memeriksa penggunaan analisis dual – primal, yang dirujuk dari perbandingan static tulisan Silberberg (1974) untuk hasil umum. Dapat ditunjukkan hasil yang lebih berguna dengan memakai model berikut.

Maksimisasi:

$$f(x_1, x_2, \alpha) = y$$

Dengan kendala:

$$g\ (x_1, x_2, \beta) = 0$$

Pada model ini, parameter tunggal α dimasukkan hanya pada fungsi obyektif, dan kemudian parameter β ke fungsi kendala saja. Menggunakan teknik Lagrangian, menyelesaikan persamaan FOC untuk mengeksplisitkan persamaan:

$$x_1 = x_1^*\ (\alpha, \beta)$$

$$x_2 = x_2^*\ (\alpha, \beta)$$

Substitusikan solusi ini ke dalam hasil fungsi obyektif nilai maksimum dari f (x_1, x_2, α) untuk α dan β yang tertentu, untuk x_1, x_2 yang memenuhi kendala, yaitu:

$$\Phi\ (\alpha, \beta) = f\ [\ x_1^*\ (\alpha, \beta),\ \ x_2^*\ (\alpha, \beta), \alpha]$$

Karena Φ (α, β) adalah nilai maksimum dari f untuk α dan β tertentu, maka $\Phi\ (\alpha, \beta) \geq f\ (x_1, x_2, \alpha)$. Untuk x_i yang memenuhi kendala.

Selanjutnya $F\ (x_1, x_2, \alpha, \beta) = f\ (x_1, x_2, \alpha) - \Phi\ (\alpha, \beta)$ adalah maksimum untuk x_i^* yang memenuhi kendala. Bagaimanapun F (x_1, x_2, α, β) merupakan fungsi dari4 variabel bebas, salah satunya, α tidak masuk dalam kendala.

Selanjutnya, dimulai dengan nilai x_1, x_2, dan β yang memenuhi kendala, dan mempertahankan nilai variable-variabel itu tetap, lebih jauh kendala tidak akan menetapkan pada pilihan α yang memaksimumkan F (x_1, x_2, α, β). Kendala mempengaruhi nilai x_1 dan x_2 yang dapat dipilih, akan tetapi tidak memaksimumkan nilai α.

Lagrangian untuk masalah dual-primal ini adalah:

$$\mathcal{L} = f\ (x_1, \ldots, x_n, \alpha) - \Phi(\alpha, \beta) + \lambda g\ (x_1, \ldots, x_n, \beta)$$

Hubungan amplop diperoleh dengan turunan pertama dari $\mathcal{L}$ terhadap α dan β = 0, menghasilkan persamaaan (20a dan 20b):

$$f_\alpha - \Phi_\alpha = 0$$

$$-\Phi_\alpha + \lambda g_\beta = 0$$

Persamaan (20a) adalah sama dengan persamaan (8), hubungan sama amplop untuk model tanpa-kendala. Labih dari itu, model dual-primal ini adalah suatu maksimum tanpa-kendala pada α, mengasumsi SSOC $F_{\alpha\alpha} = f_{\alpha\alpha} - \Phi_{\alpha\alpha} < 0$.

Perbandingan static mendasar menghasilkan persamaan (10) sebelumnya, sebagai:

$$f_{1\alpha}\frac{\delta x_1^*}{\delta\alpha} + f_{2\alpha}\frac{\delta x_2^*}{\delta\alpha} > 0$$

Jika α merefresentasikan suatu vector parameter yang dimasukkan hanya pada fungsi obyektif, kemudian matrik dari ($f_{\alpha\alpha}$ – $\Phi_{\alpha\alpha}$) harus menjadi semi-definit negative, dan persamaan (10) berikutnya dari elemen diagonal non-positip.

Pada kasus dimana β adalah suatu vector dengan dua atau lebih parameter ($\beta_1, \ldots, \beta_m$), ini adalah memungkinkan untuk x_1, x_2 dan α tetap konstan dan mencirikan β_j yang menyelesaikan masalah dual-primal. Fungsi obyektif semula tidak berisikan nilai β_j, masalah dual-primal direduksi untuk:

Maksimisasi β:

$$-\Phi(\alpha, \beta)$$

Dengan kendala:

$$g(\alpha, \beta) = 0$$

dimana x = (x_1, x_2). Tentunya, memaksimumkan – Φ(α, β) adalah sam seperti meminimumkan Φ(α, β), dan pada kasus ini, fungsi obyektif tidak langsung adalah cembung *(convex)* pada parameter β, yang merupakan kendala. Bila kendala adalah linear pada β_j maka fungsi obyektif tidak langsung harus merupakan *quasi-convex* pada parameter ini (linearitas bukan merupakan persyaratan perlu untuk convexitas quasi).

Contoh.

Pada model penting konsumen, kegunaan barang adalah dimaksimumkan dengan kendala garis anggaran. Maka,

Maksimisasi:

$$U(x_1, x_2)$$

Kendalanya:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

Dengan menggunakan metode Lagrangian, implikasi fungsi pilihan adalah permintaan *Marshallian* x = $x_i^*(p_1, p_2, M)$, i = 1, 2. substitusikan fungsi ini ke dalam fungsi obyektif yang menghasilkan fungsi kegunaan tidak langsung:

$$U^*(p_1, p_2, M) = U[x_1^*(p_1, p_2, M), x_2^*(p_1, p_2, M)]$$

Dengan demikian masalah dual-primal adalah:

Maksimisasi:

$$U(x_1, x_2) - U^*(p_1, p_2, M)$$

Kendalanya:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

dimana maksimisasi mencari x_1, x_2 dan parameter p_1, p_2 dan M. Oleh karena semua parameter adalah kendala yang bersifat eksklusif, maka masalah maksimisasi terhadap harga dan pendapatan, disederhanakan menjadi:

Maksimisasi:

$$-U^*(p_1, p_2, M)$$

Kendalanya:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

Hal ini dikatakan bahwa pemilihan barang x_1 dan x_2 sedemikian yang memaksimumkan adalah sama halnya dengan memilih harga dan pendapatan uang yang meminimumkan fungsi keegunaan tidak langsung, juga tentunya dengan kendala anggaran. Oleh karena kendala anggaran adalah linear pada harga dan pendapatan, maka implikasinya bahwa fungsi kepuasan tidak langsung adalah convex pada harga dan pendapatan.

Hubungan yang bersifat resiprocal dapat diturunkan pada model ini dengan menggunakan hubungan amplop (persamaan 20). Menuliskan hubungan ini sebagai identitas dan menunjukkan fungsi ketergantungan dipakai fungsi pilihan eksplisit, didapatkan persamaan (21a dan 21b):

$$\Phi_\alpha(\alpha, \beta) \equiv f_\alpha\,[\,x_1^*(\alpha, \beta),\ x_2^*(\alpha, \beta), \alpha\,]$$

$$\Phi_\beta(\alpha, \beta) \equiv \lambda^*(\alpha, \beta)\, g_\beta\,[\,x_1^*(\alpha, \beta),\ x_2^*(\alpha, \beta), \beta\,]$$

Identitas (21a) sama halnya pada kasus model tanpa-kendala, karena parameter α dimasukkan hanya pada fungsi obyektif. Untuk dua parameter demikian, α_1 dan α_2, kita derivasi persyaratan resiprokal yang diperlihatkan pada persamaan (12) dan persamaan (13) dengan cara yang sama seperti sebelumnya. Sebagai tambahan, karena $\Phi_{\alpha\beta} \equiv \Phi_{\beta\alpha}$, kita derivasi menggunakan produk sama seperti aturan berantai *(chain rule)* pada sisi kanan persamaan (21b), maka diperoleh persamaan (22):

$$f_{1\alpha}\frac{\delta x_1^*}{\delta\beta} + f_{2\alpha}\frac{\delta x_2^*}{\delta\beta} = \lambda^*\left[g_{1\beta}\frac{\delta x_1^*}{\delta\alpha} + g_{2\beta}\frac{\delta x_2^*}{\delta\alpha}\right] + g_\beta\frac{\delta\lambda^*}{\delta\alpha}$$

Suatu tambahan pada hubungan set resiprokal dapat tersedia pada kasus dua parameter β_1 dan β_2 yang keduanya dimasukkan hanya pada kendala, hubungan ini perlu mencakup derivasi parsial dari λ^*, sebagaimana dicatat pada persamaan (21b).

Interpretasi Multiplier Lagrangian

Multiplier Lagrangian λ telah lama diterima dan secara prinsip sebagai suatu cara yang cocok dari keadaan FOC dan SSOC unuk maksimisasi. Kenyataannya, alas an utama untuk penggunaan teknik Lagrangian pada ilmu ekonomi (dan juga ilmu lainnya) adalah bahwa λ seringkali memiliki suatu interpretasi menarik dari yang dikandungnya. Dihubungkan dengan model maksimisasi terkendala:

Maksimisasi:

$$f(x_1, x_2) = y$$

Kendalanya:

$$g(x_1, x_2) = k$$

Biasanya dibuat persamaan kendala = 0, disini, beberapa persamaannya nilai acak k.Dengan adanya keadaan kendala pada cara ini, kita akan menghubungkan perubahan parameter pada nilai dari fungsi g. Menggunakan Lagrangian:

$$\mathcal{L} = f(x_1, x_2) + \lambda[k - g(x_1, x_2)]$$

Persamaan turunan pertama adalah (25a, 25b, dan 25c):

$$\mathcal{L}_1 = f_1(x_1, x_2) - \lambda g_1(x_1, x_2) = 0$$

$$\mathcal{L}_2 = f_2(x_1, x_2) - \lambda g_2(x_1, x_2) = 0$$

$$\mathcal{L}_\lambda = k - g(x_1, x_2) = 0$$

Gabungan persamaan (25a) dan (25b) diperoleh persamaan (26):

$$\lambda = \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$$

Bagaimanapun, ekspresi membantu untuk λ dapat diperoleh dengan menggunakan teorema amplop. Dengan menggunakan persamaan (25) secara simultan, diperoleh fungsi pilihan eksplisit $x_1^*(k)$, $x_2^*(k)$ dan $\lambda^*(k)$. Substitusikan solusi ini ke dalam f (x_1, x_2) yang menghasilkan fungsi obyektif tak langsung.

$$\Phi(k) = f[x_1^*(k), x_2^*(k)]$$

Dengan teorema amplop untuk penyelesaian model maksimisasi terkendala pada persamaan (19), dihasilkan persamaan (27):

$$\Phi\ (k) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta k} = \lambda^*\ (k)$$

Ini berarti bahwa, multiplier lagrangian λ = tingkat perubahan nilai maksimum (atau minimum) dari fungsi obyektif terhadap perubahan parameter pada nilai konstan.

Sekali lagi, dihubungkan dengan persamaan (19), $\Phi_\alpha\ (\alpha) = f_\alpha + \lambda g_\alpha$. Kita dapat memahami hubungan ini dengan menggunakan persamaan (27). Penafsiran dari persamaan (19) sebagai:

$$\frac{\delta \phi}{\delta \alpha} = \frac{\delta f}{\delta \alpha} + \frac{\delta f}{\delta g} . \frac{\delta g}{\delta \alpha}$$

Bilamana suatu parameter yang dimasukkan baik pada fungsi obyektif maupun perubahan kendala, parameter itu menghasilkan dua pengaruh terpisah. *Pertama,* fungsi obyektif terpengaruh secara langsung, oleh $\frac{\delta f}{\delta \alpha}$. Sebagai tambahan, nilai dari kendala terpengaruh oleh jumlah $\frac{\delta g}{\delta \alpha}$. Hal ini merupakan pengkonversian terhadap unit dari fungsi obyektif f oleh pengalian (multiplier) λ (=$\frac{\delta f}{\delta g}$). Jumlah pengaruh dari keduanya adalah suatu dampak keseluruhan dari perubahan pada α kepada nilai y maksimum.

Penerapan umum dari perhatian model persamaan (27) pada fungsi obyektif adalah berbagai besaran nilai dari fungsi output, yang memaksimumkan kendala terhadap suatu sumberdaya terbatas untuk beberapa tingkat k. Jika suatu increament tambahan dari sumberdaya, Δ k, yang tersedia, output akan meningkat sejumlah Δ y* ≈ λ*Δ k. Dengan kata lain, λ* adalah nilai marginal dari sumberdaya itu. Pada perekonomian kompetitif, kesediaan membayar *(willing to pay)* perusahaan menjadi λ* untuk setiap tambahan (increament) pada sumberdaya. Pada literature pemograman secara matematik, λ* disebut *harga bayangan (shadow price)* dari sumberdaya. Pada model dimana output social adalah memaksimumkan kendala dari parameter tenaga kerja dan kendala modal, multiplier Lagrangian dihubungkan dengan atribut kendala harga bayangan factor ini, misalnya upah dan tingkat rent terhadap tenaga kerja dan modal.

Sekali lagi dihubungkan dengan model:

Maksimisasi:

$$f\ (x_1, x_2) = y$$

Kendalanya:

$$g\ (x_1\ , x_2) = k$$

Oleh karena parameter k masuk dalam kendala, yang kita kenal pada umumnya, tanda dari $\delta\lambda^* / \delta k$ adalah tidak ditentukan. Bagaimanapun, pada beberapa model penting, tersedia asumsi tambahan suatu tanda untuk bagian ini.

Mendefresiasikan persamaan (25) terhadap k, didapatkan persamaan (28):

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ -g_1 & -g_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta x_1^*}{\delta k} \\ \dfrac{\delta x_2^*}{\delta k} \\ \dfrac{\delta \lambda^*}{\delta k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian untuk $\delta\lambda^* / \delta k$, adalah:

$$\frac{\delta \lambda^*}{\delta k} = -\frac{H_{33}}{H}$$

Dimana H adalah pembatasan determinan *Hessian*dari Lagrangian $\mathcal{L}$. Dari SSOC, $H > 0$. Sekarang andaikan bahwa f dan g adalah fungsi peningkatan secara ketat sehingga $\lambda^* > 0$. Selanjutnya bahwa f adalah cekung *(concave)* dan g adalah suatu fungsi yang cembung. Maka – g harus cekung, dan karenanya $\mathcal{L}$ adalah cekung. Pada kasus ini maka, $H_{33} = \mathcal{L}_{11}\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{12}^2 \geq 0$, dan berikutnya $\delta\lambda^* / \delta k \leq 0$. Jika g merupakan linear, persyaratan ini mendapatkan sepanjang f adalah cekung. Hal ini juga menunjukkan, melalui metode dual-primal, bahwa jika $\delta\lambda^* / \delta k < 0$, $\mathcal{L}$ seharusnya merupakan fungsi cembung yang kaku.

Hasil generalisasi ini secara mendasar untuk model maksimisasi dengan pengganda kendala.

Maksimisasi:

$$f\ (x) = y$$

Kendalanya:

$$g\ (x) \leq k$$

dimana $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $g(x) = g^j(x_1, \ldots, x_n)$, dan $k = (k_1, \ldots, k_m)$, $j = 1, \ldots, m$. Fungsi pilihan $x = x^*(k)$ dan pengganda Lagrangian $\lambda^*(k)$ model ini dihasilkan oleh solusi simultan dari FOC Lagrangian, dengan menahan asumsi SSOC. Fungsi obyektif tak langsung adalah $\Phi(k) = f\{x^*(k)\}$. Oleh teorema amplop, persamaan menjadi $\lambda^{j*}(k) = \delta\Phi/\delta k^j$, nilai marginal dari kj sumberdaya ke j yang longgar, diukur oleh peningkatan hasil pada nilai fungsi obyektif. Jika f (x) concave dan $g^j(x)$ adalah convex untuk $j = 1, \ldots, m$, $\Phi(k)$ adalah concave pada k, dan kemudian $\Phi_{kk} = (\delta\lambda^* / \delta k)$ adalah semi-definit negative. Oleh karena elemen diagonal dari (Φ_{kk}) akan menjadi non-positip, hal ini mengimplikasikan bahwa $(\delta\lambda^* / \delta k) \leq 0$. Pada beberapa model penting, kendalanya adalah linear, seperti pencirian syarat kepuasan dari teori ini.

Pembuktian kembali diletakkan pada definisi dari fungsi cekung dan cembung. Misalkan k^1 dan k^2 merupakan dua nilai yang acak dari vector k, dan mengindikasikan implikasi vector pilihan sebagai $x^1 = x^*(k^1)$, $x^2 = x^*(k^2)$. Berikut $k^t = k^1 t + (1 - t) k^2$, $x^t = t x^1 + (1\text{-}t) x^2$, $0 \leq 1 \leq 1$. Kecembungan kendala adalah:

$$g(x^1) \leq tg(x^1) + (1 - t) g(x^2) \leq t k^1 + (1 - t) k^2 = k^t$$

x^1 adalah suatu pilihan yang layak untuk atau solusi untuk model ini, dan yang memenuhi kendala bilamana $k = k^1$.

Oleh karena f (x) adalah cekung *(concave)*, maka

$$f(x^1) \geq tf(x^1) + (1 - t) f(x^2) = t\,\Phi(k^1) + (1 - t)\,\Phi(k^2)$$

mengingat definisi dari Φ, $\Phi(k^1) \geq f(x^1)$, sehingga:

$$\Phi(k^1) \geq t\,\Phi(k^1) + (1 - t)\,\Phi(k^2)$$

Oleh karena itu, $\Phi(k)$ adalah concave pada k. Penggunaan asumsi diferensialitas, matrik Hessian Φ_{kk} adalah semi-definit negative, yang menghasilkan perbandingan static biasa pada kasus-kasus demikian. Suatu penerapan penting dari hasil ini pada model "Negara kecil" dari perdagangan internasional, dimana output total suatu perekonomian adalah memaksimumkan kendala yang ada di dalam *(endowmwnt).* Jika fungsi produksinya adalah concave (cekung) teori ini mengimplikasikan bahwa suatu peningkatan pada factor *endowment* (dari dalam) dari beberapa factor adalah tidak mungkin dapat meningkatkan harga factor.

Pengaruh Le Châtelier

Kita kini makan menghubungkan respon variable (yang menentukan) keputusan terhadap perubahan pada beberapa parameter bilaman sutau kendala penawaran/yang diperlukan *(binding constraint)* ditambahkan ke dalam model. Ditunjukkan pada model bahwa bila satu factor dipegang tetap konstan pada level laba maksimumnya, lalu terdapat suatu bagian yang mengalami keseimbangan *(equilibrium)* maka permintaan factor menjadi kurang elastis. Dikaitkan dengan model yang lebih umum, kita sangat tertarik pada penemuan struktur model yang dapat menghasilkan prediksi berbeda pada tanggapan (respon) dari variable pilihan terhadap parameter perubahan bilamana kendala penawaran/ yang dibutuhkan *(binding-constrain)* ditambahkan. Diskusi terhadap model dibatasi pada beberapa parameter, α dimasukkan hanya pada fungsi obyektif dan parameter β pada kendala, dan akan memakai notasi vector pada bahasan.

Maksimisasi:

$$y = f(x,\alpha)$$

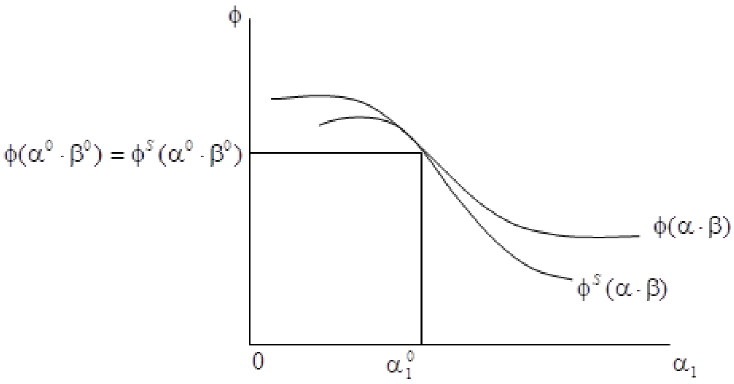
Kendalanya:

$$g(x,\beta) = 0$$

dimana x = (x1, . . . , xn) dan α maupun β adalah vector dari parameter yang dikembangkan haya pada fungsi obyektif dan kendala. Persyaratan FOC dan SSOC tetap dipegang, kita akan menurunkan fungsi pilihan eksplisit $x^*(\alpha, \beta)$ dan $\lambda^*(\alpha, \beta)$. Fungsi tidak langsung $\Phi^*(\alpha, \beta) = f[x^*(\alpha, \beta), \alpha]$. Oleh karena $f(x, \alpha) - \Phi(\alpha, \beta)$ adalah memaksimumkan *unconstraint* pada α, kita dapat menurunkan hasil perbandingan static umum untuk beberapa scalar α, pada persamaan (10).

$$\sum_i f_{i\alpha} \frac{\delta x_i}{\delta \alpha} \geq 0$$

Kini andaikan suatu tambahan kendala, h (x) = 0, yang konsisten dengan keseimbangan awal merupakan tambahan terhadap model. Ini adalah berarti $x^o = x^*(\alpha^o, \beta^o)$, yang kita perlukan adalah $h(x^o) = 0$. Kendala ini dapat disebut *binding* (diperlukan), karena tidak akan mengganggu posisi maksimasi awal. Bagaimanapun hal ini akan mempengaruhi tingkat perubahan dari variable keputusan sebagai akiba perubahan parameter. Kita dapat mencatat fungsi pilihan baru, yang merupakan solusi terhadap FOC dan h (x) = 0, seperti $x^s(\alpha, \beta)$, jangka pendek, dan fungsi obyektif tak langsung yang baru sebagai $\Phi^s(\alpha, \beta)$, yang diperlihatkan pada gambar. 4.



GAMBAR 4

Penggambarannya, dimana $\alpha = \alpha^o$ dan $\beta = \beta^o$, $\Phi = \Phi^s$, tetapi $\alpha \neq \alpha^o$ dan $\beta \neq \beta^o$, $\Phi > \Phi^s$. Secara ekuivalen, fungsi F $(\alpha^o, \beta^o) = \Phi - \Phi^s$ memiliki suatu nilai minimum tak terkendala (dari nol) di (α^o, β^o) baik terhadap α maupun β sepanjang parameter ini mendukung kendala. Mengasumsikan kemampuan penurunan fungsi tersebut, ini berarti bahwa Φ^s relative lebih cekung dari pada Φ. Implikasi FOC – nya adalah persamaan (29a dan 29b):

$$F_\alpha = \Phi_\alpha - \Phi^s_\alpha = 0 \quad \ldots\ldots (29a)$$

$$F_\beta = \Phi_\beta - \Phi^s_\beta = 0 \quad \ldots\ldots (29b)$$

SSOC adalah matrik $F_{\alpha\beta}$ turunan keduanya terhadap α dan β adalah semi-definite positip. Persyaratan ini mengakibatkan bagian matrik $F_{\alpha\alpha}$ dan $F_{\beta\beta}$ adalah semi-definite positip, dan elemen diagonal matrik ini adalah non-negatif. Dengan demikian untuk beberapa besaran *(scalar)* khusus parameter α, adalah menjadi persamaan (30):

$$F_{\alpha\alpha} = \Phi_{\alpha\alpha} - \Phi^s_{\alpha\alpha} \geq 0 \quad \ldots\ldots (30)$$

Menggunakan analisis lanjut persamaan (10), menghasilkan persamaan (31):

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i\alpha} \left(\frac{\delta x_i^*}{\delta\alpha} - \frac{\delta x_i^s}{\delta\alpha} \right) \geq 0 \quad \ldots\ldots (31)$$

Meskipun persamaan ringkasan (31) perbandingan static Le Châtelier dapat menyediakan hasil untuk parameter α, hasil yang lebih berguna terjadi bilamana persyaratan teori pasangan conjugate tetap dipegang, misalnya kalau beberapa α khusus hanya memasukkan ke i pada persamaan FOC. Pada kasus ini, persamaan (31) merupakan reduksi terhadap satu bagian, yang menghasilkan persamaan (32)

$$f_{i\alpha} \frac{\delta x_i^*}{\delta \alpha} \geq f_{i\alpha} \frac{\delta x_i^s}{\delta\alpha} \geq 0 \quad \ldots\ldots (32)$$

Oleh karena $f_{i\alpha}$ dapat bernilai negatip, kita tidak dapat menunda penyederhanaan penyelesaian bagian ini. Bagaimanapun, dengan $\delta x_i^* / \delta\alpha$ dan $\delta x_i^s / \delta\alpha$ memiliki tanda yang sama seperti $f_{i\alpha}$, respon dari x_i terhadap perubahan pada α adalah selalu lebih besar pada nilai absolute dalam membantu kendala, sehingga persamaannya (33):

$$\left|\frac{\delta x_i^*}{\delta \alpha}\right| \geq \left|\frac{\delta x_i^s}{\delta \alpha}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Hasil Le Châtelier biasanya merupakan gambaran bagian dari pengaruh satu variable pilihan konstan yang dipegang. Kita melihat bahwa hal ini merupakan ketidak-pastian yang tidak penting.

Parameter β umumnya tidak memberikan hasil yang sederhana seperti persamaan (32), mengingat ekspresi pada pengganda Lagrangian selalu ada. Berkaitan dengan itu, kasus khusus penting dari model, mengambil bentuk kendala g (x) = k. Definisi Lagrangian untuk model ini adalah $\mathcal{L} = f(x,\alpha) + \lambda [k - g(x)]$ menjadi fungsi obyektif tak langsung. Dari persamaan (27), $\Phi_k = \lambda^* (\alpha,k)$. Kita tahu dari analisis perbandingan static umum bahwa $\delta \lambda^* / \delta k > 0$ atau $\delta \lambda^* / \delta k < 0$.

DAFTAR PUSTAKA

Chiang, A. C. and Wainwright, K.,, Fundamental Methods of Mathematical Economics, 4th ed, McGraw-Hill

Eugene Silberberg.2002, Principles of Microeconomics, Third Edition, October 28th 2002 by Pearson

Silberberg, E., and Suen, W, The Strucuttre Of Economics : A Mathematical Analysis, 3rd. ed, Mcgraw-Hill

Sydsater, K., Hammond, P, Seierstad, A., Strom, A., urther Mathematics for Economic Analysis, FT- PrenticeHall

Ranshaw,Geoff, Math for Economics, Oxford