TIRTAMATH: Jurnal Penelitian dan Pengajaran Matematika
Volume 4 Nomor 1 Tahun 2022
ISSN 2885-9890 (print) | ISSN 2720-9083 (online)
https://jurnal.untirta.ac.id/index.php/Tirtamath/index

Analisis kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematis pada mata kuliah analisis real

Anwar Mutaqin[1*], Syamsuri[2], Aan Hendrayana[3]
[1,2,3]Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sultan Ageng Tirtayasa

Article History:
Received: June 01, 2022
Revised: June 27, 2022
Accepted: June 30, 2022

Keywords:
Real Analysis; Mathematical Proof; Learning Obstacles

***Correspondence Address:**
anwar_mutaqin@untirta.ac.id

Abstract: *This study was conducted to determine and analyze the learning obstacles of students in constructing proof on Real Analysis course. Samples are undergraduate at Departement of Mathematics Education is being contracted Real Analysis course of two state universities, namely the University Pendidikan Indonesia (UPI) and the University of Sultan Ageng Tirtayasa (Untirta). Data were collected through structured interviews. Students are given a number of evidentiary matter then conducted interviews to determine the errors that arise when developing a mathematical proof. The results showed that student difficulties when preparing evidence are: 1) start the proof, 2) definitions and axioms, 3) the form of algebraic manipulation, 4) integrate the definitions and / or theorems in a proof structure, 5) choose the way of proof, 6) choose the theorem to construct proof, 7) construct their own examples and counter examples.*

PENDAHULUAN

Menurut Polya (1985: 154) masalah dalam matematika dibagi menjadi dua macam, yaitu masalah berkaitan dengan menemukan jawaban (*problem to find*) dan masalah membuktikan (*problem to prove*). Siswa-siswa di Indonesia umumnya tidak terbiasa dengan masalah pembuktian. Guru mengajarkan matematika hanya berkaitan dengan penggunaan prosedur atau algoritma untuk menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan aplikasi suatu konsep matematika. Soal-soal latihan yang diberikan guru atau di buku-buku sedikit sekali yang menuntut siswa untuk mampu membuktikan suatu pernyataan matematis. Jika pun ada soal yang demikian, hal itu hanya berkaitan dengan membuktikan kesamaan identitas pada Trigonometri dan manipulasi Aljabar sederhana. Siswa-siswa yang mampu membuktikan suatu pernyataan matematika biasanya adalah siswa yang dipersiapkan untuk mengikuti lomba olimpiade matematika. Mereka dilatih dalam jangka waktu tertentu dan tidak banyak siswa yang dilibatkan, hanya sekitar 10 orang setiap sekolah.

Akibatnya, siswa yang melanjutkan studi ke perguruan tinggi dan masuk program studi matematika atau pendidikan matematika mengalami '*shock'* ketika dalam perkuliahan berhadapan dengan masalah pembuktian pernyataan matematika. Masalah pembuktian matematis diperlukan pada setiap mata kuliah dalam matematika, khususnya pada mata kuliah teori bilangan, kalkulus, Analisis Real, dan struktur aljabar. Mahasiswa merasa pernyataan yang harus dibuktikan tersebut sudah telihat jelas kebenarannya, sehingga tidak perlu dibuktikan lagi. Pernyataan-pernyataan tersebut sudah sering mereka gunakan begitu saja ketika mereka menyelesaikan masalah berkaitan dengan aplikasi suatu konsep.

Peralihan masalah pembuktian matematis dari sekolah menengah ke perguruan tinggi terlihat mendadak. Hal ini merupakan sumber kesulitan mahasiswa dalam masalah pembuktian, bahkan bagi mahasiswa yang dikenal pandai dalam matematika sekolah menengah (Moore, 1994). Materi logika yang telah dipelajari mahasiswa di sekolah menengah tidak banyak membantu mereka ketika berhadapan dengan masalah-masalah pembuktian matematis. Mereka tetap kesulitan dengan berbagai terminologi, notasi, dan bahasa yang digunakan dalam pembuktian matematis. Banyak mahasiswa yang mengalami kesulitan ketika membuat negasi suatu pernyataan matematika, padahal jika pernyataannya dalam bentuk kalimat biasa mereka mampu melakukannya dengan benar.

Penelitian empiris yang berkaitan dengan kesulitan kognitif masalah pembuktian matematis, umumnya pada topik geometri di sekolah, banyak dilakukan peneliti di luar negeri. Hal-hal yang potensial menimbulkan kesulitan pada mahasiswa berkaitan dengan pembuktian matematis adalah; a) persepsi tentang sifat dasar bukti matematis, b) logika dan metode pembuktian, c) kemampuan problem solving, d) bahasa matematika, dan (e) pemahaman konsep (Moore, 1994). Alcock dan Weber (2005) menemukan bahwa 10 dari 13 mahasiswa tidak mengenali langkah yang tidak valid dalam pembuktian. Ko dan Knuth (2009) menemukan bahwa semua mahasiswa yang berjumlah 36 orang yang menjadi objek penelitiannya tidak ada yang mampu menuliskan bukti matematis secara lengkap dan hanya 25% yang mampu mengajukan contoh penyangkal (*counterexample*) untuk menolak pernyataan yang salah. Kogce, et al. (2010) menemukan bahwa siswa mengetahui pentingnya bukti matematis, tetapi hanya menggunakan pola induktif dan contoh-contoh kasus dalam pembuktian. Giannakoulias, et al. (2010) menemukan bahwa guru menolak argumen yang tidak valid dengan cara menggunakan teori atau aturan umum dan hanya sedikit yang menggunakan contoh penyangkal.

Penelitian yang berupaya meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian matematis telah dilakukan oleh beberapa peneliti, seperti; Kusnandi (2006), Arnawa, et al. (2007), dan Maya (2011). Namun hasilnya masih belum memuaskan. Hal ini disebabkan peneliti mengabaikan kesulitan-kesulitan kognitif mahasiswa dalam pembuktian. Oleh karena itu, perlu dilakukan penelitian lebih detail untuk mengungkap kesulitan kognitif mahasiswa ketika berhadapan dengan masalah atau soal yang menuntut pembuktian matematis, khususnya pada mata kuliah Analisis Real. Selain itu, penelitian ini dapat mengungkap persepsi mahasiswa terhadap masalah bukti matematis.

METODE

Penelitian ini bertujuan untuk mengungkap kesulitan kognitif mahasiswa dalam menyusun bukti khususnya pada mata kuliah Analisis Real. Untuk keperluan tersebut, mahasiswa sebagai sukarelawan diobservasi selama pembelajaran Analisis Real di kelas. Observasi dilakukan terhadap mahasiswa program studi pendidikan matematika Universitas Pendidikan Indonesia (UPI) Bandung dan Universitas Sultan Ageng Tirtayasa (UNTIRTA) Serang. Selanjutnya dipilih mahasiswa secara acak sebanyak 8 orang dari masing-masing perguruan tinggi.

Data diperoleh melalui wawancara terstruktur kepada 16 orang mahasiswa yang sudah dipilih. Di antara 12 mahasiswa tersebut, 3 orang di antaranya sedang menempuh studi magister pendidikan matematika, sisanya adalah mahasiswa sarjana pendidikan matematika. Mereka mengikuti perkuliahan Analisis Real pada semester gasal. Topik yang dibahas adalah sistem bilangan real dan barisan bilangan real

Mahasiswa diberi soal-soal Analisis Real berkaitan dengan sistem bilangan real dan barisan bilangan real. Mahasiswa diberi kesempatan untuk mengerjakan soal tersebut selama satu hari. Hal ini dilakukan kepada mahasiswa untuk mempelajari kembali materi yang diperlukan untuk menjawab soal tersebut. Mahasiswa dilarang bekerjasama ketika mengerjakan soal-soal tersebut. Hasil pekerjaan mahasiswa diperiksa dan soal-soal yang belum mampu dijawab atau dijawab tetapi salah dikerjakan kembali oleh mahasiswa di bawah bimbingan peneliti. Hal ini dilakukan untuk menelisik lebih dalam tentang kesulitan mahasiswa ketika menyelesaikan soal-soal tersebut.

Jawaban mahasiswa dianalisis dalam sesi wawancara dengan mahasiswa satu per satu. Pada saat wawancara tersebut, mahasiswa diberi soal tambahan untuk dikerjakan mahasiswa. Soal tambahan yang diberikan memiliki karakteristik yang hampir sama dengan soal sebelumnya yang telah diberikan. Tujuannya adalah untuk memastikan bahwa kesulitan tertentu muncul secara konsisten pada mahasiswa ketika mengerjakan soal Analisis Real. Selain itu, soal tambahan diperlukan untuk memastikan bahwa soal yang sudah dikerjakan dengan benar merupakan hasil pekerjaannya sendiri.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dosen yang mengajar mata kuliah Analisis Real menggunakan pembelajaran langsung dan sangat teliti ketika menjelaskan konsep dan bukti secara detail. Mahasiswa benar-benar dilibatkan dalam pembelajaran dengan cara menanyakn kepada mahasiswa tentang konsep dan bukti, meminta mahasiswa untuk bertanya jika tidak memahami penjelasan dosen, memberi mahasiswa soal-soal latihan, dan meminta mahasiswa mengerjakan soal pembuktian di papan tulis secara bergantian. Dosen sangat kooperatif ketika mengajar dan tidak keberatan jika mahasiswa menanyakan masalah-masalah perkulihan di luar kelas.

Dengan mengabaikan faktor beberapa mahasiswa memang kurang cerdas, dalam penelitian ini ditemukan 8 kesulitan kognitif yang dialami mahasiswa ketika berhadapan dengan soal atau masalah pembuktian. Kesulitan tersebut adalah sebagai berikut:

a) Siswa tidak mengetahui cara memulai pembuktian,
b) Mahasiswa tidak mengetahui definisi dan aksioma serta tidak mampu membedakan keduanya
c) Mahasiswa kurang menguasai kemampuan dalam manipulasi bentuk aljabar,
d) Mahasiswa tidak mampu mengintegrasikan definisi dan/atau teorema/lemma dalam struktur pembuktian,
e) Mahasiswa tidak memiliki gambaran tentang memilih cara pembuktian suatu pernyataan matematis,
f) Mahasiswa tidak mampu mengaitkan masalah yang akan dibuktikan dengan teorema yang diperlukan untuk pembuktian, dan
g) Mahasiswa kurang memiliki naluri atau insting yang memadai untuk mengerjakan soal pembuktian, dan
h) Mahasiswa tidak mampu membangun contoh dan contoh penyangkal (*couterexample*) sendiri.

Memulai Pembuktian

Memulai pembuktian berarti menentukan awal dan akhir suatu rangkaian argumen yang diperlukan untuk membuktikan suatu pernyataan. Sayangnya masalah ini masih merupakan bagian yang sulit bagi mahasiswa, khususnya ketika membuktikan suatu pernyataan yang memuat kuantor unversal dan kuantor eksistensial. Ketika diberi soal masalah pembuktian, umumnya mahasiswa hanya berkutat pada pernyataan yang diketahui, bukan pada masalah yang akan dibuktikan. Bahkan sebagian besar di antaranya menuliskan konsekuensi dari pernyataan yang diketahui dan dengan berbagai manipulasi aljabar berusaha membuktikan pernyataan. Akibatnya mahasiswa tidak sampai pada pembuktian yang seharusnya.

Hal di atas tergambar melalui soal tentang menunjukkan suatu fungsi komposisi adalah injektif. Semua mahasiswa mengetahui definisi fungsi injektif. Suatu fungsi $f: A \to B$ dikatakan injektif jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$. Namun definisi ini kurang operasional karena bekerja dengan tanda $\neq$ lebih sulit daripada bekerja dengan tanda $=$. Oleh karena itu, mahasiswa dibiasakan mengambil kontrapositif dari pernyataan di atas, yaitu $f: A \to B$ dikatakan injektif jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $f(x) = f(y)$, maka $x = y$.

Pengetahuan mahasiswa terhadap definisi tersebut ternyata tidak menjamin mereka dapat mengerjakan soal dengan baik. Misalnya pada soal berikut.

Misalkan f dan g fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Jika $f \circ g$ injektif, buktikan g injektif!

Mahasiswa tidak dapat mengoperasionalkan kuantor universal untuk setiap pada saat memulai. Seharusnya mahasiswa mulai dengan ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$ sedemikain sehingga… sebagai bentuk operasional dari kuantor untuk setiap. Akibatnya, pembuktian tidak berjalan sebagaimana seharusnya karena sudah macet di permulaan. Demikian halnya ketika diberi soal lain, yaitu membuktikan jika $A \subseteq B$, maka $A \cap B = A$. Ketika membuktikan $A \subseteq A \cap B$, mahasiswa tidak mengetahui apa yang harus dilakukan, padahal mereka tahu definisi himpunan bagian. Mereka tidak bisa mnerjemahkan untuk setiap menjadi ambil sebarang dalam pembuktian.

Kesulitan dalam memulai pembuktian juga dialami mahasiswa pada saat membuktikan suatu barisan konvergen dan soal pembuktian berkaitan dengan sifat kelengkapan bilangan real. Pada soal barisan, mahasiswa tidak mengalami masalah untuk membuktikan bahwa suatu barisan (x_n) konvergen ke x. Namun, ketika soalnya diubah menjadi buktikan barisan (x_n) konvergen, mahasiswa mengalami sedikit masalah. Mereka tidak berani membuat pemisalan atau mengklaim terlebih dahulu limit barisannya untuk kemudian dibuktikan klaimnya tersebut.

Hal demikian juga terjadi ketika mengerjakan soal sebagai berikut; Diketahui S_0 dan S subset tak kosong dari $\mathbb{R}$ dan $S_0 \subseteq S$. Buktikan $\inf S \leq \inf S_0 \leq \sup S_0 \leq \sup S$!. Karena mahasiswa mengalami kesulitan, maka mahasiswa hanya diminta membuktikan hanya satu bagian, yaitu $\inf S \leq \inf S_0$. Dengan tujuan memperjelas permasalahan, mahasiswa berusaha membuat ilustrasi pernyataan tersebut. Namun demikian, mereka masih tidak menemukan cara menuliskan pembuktian meskipun dalam pikiran mereka sudah jelas berdasarkan ilustrasi yang mereka buat. Hal ini disebabkan mereka tidak berani membuat pemisalan untuk menyederhanakan penulisan. Oleh karena itu, mahasiswa diberi petunjuk dengan cara memberikan langkah awal, yaitu misalkan $u = \inf S$ dan meminta mahasiswa melanjutkan pembuktian.

Definisi dan Aksioma

Umumnya mahasiswa tidak mengetahui beberapa definisi dan aksioma yang diperlukan dalam pembuktian. Mahasiswa tidak bisa membedakan antara definisi dengan aksioma dan kapan menggunakan keduanya dalam pembuktian. Bahkan untuk kasus yang sangat sederhana mahasiswa tidak mengetahui definisi suatu konsep seperti, definisi $a > b$ dan definisi barisan terbatas. Akibatnya, mahasiswa seringkali terbalik ketika melakukan pembuktian.

Pada mulanya mahasiswa diminta membuktikan pernyataan "jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $ab > 0$, maka $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$". Karena mahasiswa tidak mempunyai ide sama sekali, akhirnya soal diganti dengan soal yang lebih mudah, yaitu, buktikan $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Bukti yang ditulis mahasiswa adalah sebagai berikut;

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$$
$$\frac{1}{n^2+n} > 0$$

Ketaksamaan yang terakhir adalah benar sehingga terbukti $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Mahasiswa tidak menyadari kekeliruannya bahkan ketika ditanya pada sesi wawancara. Mahasiswa diberi penjelasan bahwa penulisan yang dilakukan mahasiswa terbalik. Jika pembuktiannya seperti yang dilakukan mahasiswa, maka mahasiswa tersebut sebenarnya membuktikan pernyataan "Jika $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, maka $\frac{1}{n^2+n} > 0$". Jelas hal ini berbeda dengan yang diminta di soal.

Akhirnya mahasiswa menyadari kekeliruannya, namun tetap tidak bisa memperbaiki pembuktian. Kemudian mahasiswa diarahkan agar dapat membuktikan pernyataan tersebut.

P (Peneliti), "Apa yang mau dibuktikan?"
M (Mahasiswa), "$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ untuk setiap n bilangan Asli"
P, " Apa yang harus ditunjukkan agar $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$? "
Mahasiswa tidak bisa menjawab
P," Anda tahu definisi $a > b$?"
M, "Lupa pak.
P, "Oke, ingat waktu belajar aksioma urutan, $a > b$ jika $a - b > 0$"
M, " Ya pak saya ingat dan mengerti"
P, "Jadi, apa yang harus dilakukan agar $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$? "
M, "Berarti harus ditunjukkan $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$. Kan sudah dilakukan tadi pak?"
P, "Coba perhatikan lagi jawaban yang tadi Anda tulis?"
M, "O ya ga sama. Tapi saya bingung mau diapakan lagi pak?"
P, " Coba uraikan $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \cdots$"

Kemudian mahasiswa menguraikan yang diminta peneliti dan mendapatkan $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n^2+n}$. Sampai di sini pun mahasiswa tidak dapat melanjutkan langkah berikutnya. Ini merupakan kesulitan lain yang dibahas pada kesulitan dalam manipulasi bentuk aljabar. Dalam pikiran mahasiswa, kesamaan akan berakhir dengan kesamaan.

Demikian pula halnya ketika mahasiswa diminta membuktikan bahwa barisan yang suku ke-n nya didefinisikan dengan $x_n = \frac{4n+2}{n}$ adalah terbatas. Mahasiswa tidak dapat segera mengerjakan soal ini karena mereka tidak mengetahui atau lupa definisi barisan terbatas. Setelah dijelaskan definisi barisan terbatas, mahasiswa memahaminya namun tidak juga mampu menuliskan bukti. Hal ini karena mahasiswa tidak mampu memanfaatkan atau menyadari peran ketaksamaan segitiga pada masalah tersebut. Ketika ketaksamaan segitiga sudah dimanfaatkan, persoalannya beralih pada masalah mensubstitusi variabel dalam bentuk kebalikannya. Maksudnya adalah ketika mahasiswa sampai pada tahap berikut;

$$\left|\frac{4n+2}{n}\right| = \left|4 + \frac{2}{n}\right| \leq 4 + \frac{2}{n},$$

Mahasiswa tidak dapat melanjutkan pada mereka tahu bahwa n adalah bilangan Asli yang berarti $n \geq 1$. Mensubstitusi $n \geq 1$ ke $\frac{2}{n}$ ini yang membingungkan mahasiswa terkait dengan tanda ketaksamaan. Namun setelah diberi penjelasan, mahasiswa dapat menyelesaikan pembuktian dengan benar.

Manipulasi Bentuk Aljabar

Kemampuan mahasiswa dalam manipulasi bentuk aljabar sangat lemah terutama berkaitan dengan; a) hubungan bolak-balik dari sebuah ketaksamaan, b) mengubah tanda kesamaan menjadi tanda ketidaksamaan, c) dan memsubstitusi sebuah variabel dengan variabel lain yang diketahui dalam hubungan yang saling berkebalikan. Kelemahan dalam hal ini mengakibatkan siswa tidak mampu mengerjakan soal pembuktian matematis secara tuntas.

Sebagai contoh, mahasiswa diminta mengerjakan soal untuk mencari solusi pertidaksamaan $|x| + |x + 1| < 2$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Semua mahasiswa menjawab masalah tersebut dengan membagi kasus untuk $x < -1$, $-1 \leq x < 0$, dan $x \geq 0$. Hanya satu orang mahasiswa yang menjawab dengan cara mengkuadratkan kedua ruas dengan terlebih dahulu memindahkan salah satu nilai mutlak ke ruas kanan. Mahasiswa dapat menjawab soal tersebut dengan benar, yaitu solusi pertidaksamaan tersebut adalah $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Namun pada salah satu kasus, yaitu untuk $-1 \leq x < 0$, menghasilkan pertidaksamaan $-x + (x + 1) < 2$ atau menjadi $1 < 2$. Berdasarkan hal ini mahasiswa menyimpulkan bahwa solusinya adalah seluruh anggota $\mathbb{R}$ dan solusi pada kasus tersebut adalah $[-1,0)$, meskipun beberapa mahasiswa tidak dapat menyimpulkan solusi pada kasus tersebut.

Hal yang menarik adalah mahasiswa tidak bisa menjelaskan himpunan $\mathbb{R}$ adalah solusi bentuk pertidaksamaan $-x + (x + 1) < 2$ atau setelah disederhanakan menjadi $1 < 2$. Dalam sesi wawancara, mahasiswa diberi tambahan soal menentukan solusi pertidaksamaan $4x - 3 > 3 + 4x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Beberapa mahasiswa bisa menjawab bahwa pertidaksamaan tidak mempunyai solusi di $\mathbb{R}$ tetapi tidak bisa memberi alasan bahwa pertidaksamaan tersebut tidak mempunyai solusi di $\mathbb{R}$. Mahasiswa bingung karena setelah disederhanakan variabel pada pertidaksamaan tersebut hilang.

Setelah mahasiswa menyelesaikan soal di atas dengan cara membagi kasus, mahasiswa ditanya tentang ketaksamaan segitiga. Semua mahasiswa mengetahui bentuk ketaksamaan segitiga. Kemudian mahasiswa diminta menyelesaikan soal tersebut, mencari solusi $|x| + |x + 1| < 2$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, dengan memanfaatkan ketaksamaan segitiga. Semua mahasiswa tidak bisa melihat kaitan antara ketaksamaan segitiga dengan permasalahan yang akan diselesaikan. Mahasiswa hanya mampu memanfaatkan ketaksamaan segitiga untuk mengubah ruas kiri menjadi $|x| + |x + 1| \leq |x| + |x| + 1$. Jelas hal ini tidak bisa membantu mahasiswa untuk mencari solusi. Mahasiswa tidak menyadari hubungan bolak-balik sebuah ketaksamaan. Mereka hanya menyadari hubungan dari ruas kiri ke ruas kanan tetapi tidak sebaliknya. Setelah mahasiswa diminta untuk memperhatikan atau membaca ketaksamaan segitiga, barus mereka menyadari bahwa ketaksamaan segitiga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Akhirnya mahasiswa berhasil mengubah persoalan semula menjadi $|x + x + 1| \leq |x| + |x + 1| < 2$ dan disederhanakan menjadi $|2x + 1| < 2$. Bentuk terakhir ini lebih mudah dan cepat diselesaikan daripada membagi kasus seperti yang telah mahasiswa lakukan.

Dalam hal manipulasi aljabar, kelemahan mahasiswa lainnya adalah mereka tidak mampu mengubah kesamaan menjadi ketaksamaan. Hal ini terlihat ketika mahasiswa diminta membuktikan $n \leq 2^{n-1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Mereka segera tahu bahwa soal itu dibuktikan dengan induksi matematika. Langkah pertama tidak masalah bagi mahasiswa. Masalahnya adalah di langkah berikutnya, yaitu membuktikan jika pernyataan tersebut benar untuk $n = k$, maka benar juga untuk $n = k + 1$. Untuk itu, mahasiswa menulis,

> Misalkan benar untuk $n = k$, maka $k \leq 2^{k-1}$. Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$, yaitu $k + 1 \leq 2^k$.

Beberapa mahasiswa mulai dengan hipotesis induksi, yaitu mengalikan kedua ruas dengan 2, sehingga menjadi $2k \leq 2.2^{k-1} = 2^k$. Ruas kanan sudah sesuai dengan yang diinginkan, tetapi mengubah ruas kiri agar menjadi $k+1$ merupakan bagian yang paling sulit dan tidak bisa diselesaikan oleh mahasiswa. Selanjutnya peneliti memberi petunjuk kepada mahasiswa untuk menguraikan $2k$ secara terpisah. Mahasiswa kemudian melanjutkan dengan menuliskan $2k = k + k$. Sampai di sini mahasiswa tidak mempunyai ide harus dibuat seperti apa sehingga sesuai dengan yang ingin dibuktikan.

P, "k anggota bilangan apa?"
M," bilangan asli"
P, " Apa akibatnya kalau k bilangan Asli?"
M, "$k > 0$"
P," Itu benar, tetapi apakah hal itu membantu menyelesaikan masalah?"
M, "Mmm, tidak"
P, "Mengapa tidak membantu?"
M, " Karena akan menghasilkan $2k > 0$ atau $2k > k$"
P, "Yang diinginkan apa?"
M," $2k > k + 1$"
P,"kalau begitu harus bagaimana?"
Setelah berpikir, mahasiswa menjawab,"Oo ya, kalau begitu $k \geq 1$"

Akhirnya mahasiswa melanjutkan pekerjaannya dan mampu membuktikan pernyataan tersebut.

Struktur Pembuktian

Struktur pembuktian menurut Moore (1994) adalah organisasi atau kerangka bukti, secara khusus tentang bagaimana memulai dan mengakhiri pembuktian serta menghubungkan bagian permulaan dan akhir dengan aturan logika, definisi, aksioma, atau teorema. Dalam banyak hal, mahasiswa sudah mengalami kesulitan untuk menentukan awal dan akhir pembuktian matematis. Hal ini berakibat pengetahuan tentang definisi, aksioma, dan teorema yang sudah dikuasai tidak membantu mahasiswa ketika menyusun bukti. Mahasiswa tidak mampu mengintegrasikan definisi, aksioma, atau teorema ke dalam struktur pembuktian.

Ilustrasi terhadap hal tersebut adalah pada saat mahasiswa mengerjakan soal

Misalkan f dan g fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Jika $f \circ g$ injektif, buktikan g injektif!

Seharusnya mahasiswa memulai dengan mengambil $x, y \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $g(x) = g(y)$ kemudian ditunjukkan $x = y$. Yang dilakukan mahasiswa adalah mulai dari yang diketahui, yaitu karena $f \circ g$ injektif, maka untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $(f \circ g)(x) = f \circ g(y)$ (atau bisa ditulis $f(g(x)) = f(g(y))$) mengakibatkan $g(x) = g(y)$. Karena g injektif, maka $x = y$.

Untuk memastikan pola pikir mahasiswa, peneliti melanjutkan dengan meminta mahasiswa membuktikan pernyataan berikut, jika $A \subseteq B$, maka $A \cap B = A$. Mahasiswa mengerjakan pembuktian pernyataan ini masih dengan pola yang sama seperti soal sebelumnya, yaitu karena $A \subseteq B$, maka untuk setiap $x \in A$ mengakibatkan $x \in B$. Sampai di sini mahasiswa tidak bisa melanjutkan karena tidak tahu lagi yang harus mengerjakan. Padahal yang seharusnya dilakukan mahasiswa untuk membuktikan $A \cap B = A$ adalah menunjukkan bahwa $A \cap B \subseteq A$ dan $A \subseteq A \cap B$ dengan memanfaatkan informasi $A \subseteq B$.

Ketika diberi arahan oleh peneliti, mahasiswa menyadari kesalahannya dan dapat memperbaiki langkah pembuktian. Berikut dialog peneliti dan mahasiswa pada kasus soal pertama

P, "Apa yang ingin dibuktikan?"
M, "Menunjukkan bahwa fungsi g injektif!"
P, "Mengapa Anda mulai dengan menuliskan konsekuensi $f \circ g$ injektif"
M, "Kan konsekuensi $f \circ g$ injektif begitu Pak"
P, "Benar, tapi perhatikan lagi apa yang mau dibuktikan"

M, “Membuktikan bahwa fungsi g injektif!”
P, ”Apa yang harus dilakukan untuk menunjukkan suatu fungsi injektif”
M, “Mmm, harus ditunjukkan harus ditunjukkan $g(x) = g(y)$mengakibatkan $x = y$ ya Pak?
P, “Ya, coba kerjakan bagaimana menuliskan pembuktiannya”

Mahasiswa kemudian menuliskan bukti sebagai berikut; Ambil $x, y \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $g(x) = g(y)$, akan ditunjukkan $x = y$. Sampai di sini mahasiswa tidak tahu langkah berikutnya. Kemudian peneliti menjelaskan bahwa $g(x)$ dan $g(y)$ adalah anggota $\mathbb{R}$ dan meminta mahasiswa melakukan operasi sehingga didapat $f \circ g(x)$ dan $f \circ g(y)$. Mahasiswa memahami hal tersebut dan melakukan operasi yang diminta. Selanjutnya mahasiswa dapat menyelesaikan pembuktian tersebut dengan benar. Dengan dialog yang serupa, akhirnya mahasiswa dapat menyelesaikan pembuktian soal kedua.

Hal lainnya yang menarik adalah banyak siswa mengalami miskonsepsi berkaitan dengan fungsi dan nilai fungsi. Fungsi dilambangkan dengan huruf kecil seperti f, sedangkan $f(x)$ adalah peta dari x oleh fungsi f. Oleh karena itu $f(x)$ adalah suatu bilangan real jika fungsnya dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$. Langkah mahasiswa terhenti pada saat $g(x) = g(y)$ disebabkan karena mereka berpikir bahwa $g(x)$ adalah fungsi, sehingga tidak terpikir operasi yang bisa dikenakan pada $g(x)$.

Memilih Cara Pembuktian

Cara yang biasa digunakan untuk membuktikan suatu pernyataan dalam matematika ada tiga, yaitu cara langsung, cara tidak langsung, dan induksi matematika. Pembuktian dengan cara langsung adalah yang paling sering digunakan untuk membuktikan suatu pernyataan matematis. Pembuktian dengan induksi matematika biasanya digunakan untuk membuktikan suatu pernyataan yang berlaku untuk seluruh bilangan Asli. Pembuktian dengan cara tidak langsung dilakukan dengan cara mengubah pernyataan awal menjadi kontrapositifnya. Jika kontrapositifnya bernilai benar, maka pernyataan awal bernilai benar karena ekivalen.

Pembuktian dengan cara tidak langsung paling banyak dilakukan dengan cara kontradiksi atau dikenal juga dengan *reductio ad absurdum*. Misalnya akan dibuktikan bahwa pernyataan p benar, maka langkah pertama adalah mengandaikan bahwa pernyataan p salah (Ini berarti mengandaikan bahwa $\sim p$ benar). Selanjutnya dilakukan analisis untuk memperoleh kontradiksi atau pertentangan dengan pernyataan lain yang sudah diketahui kebenarannya. Karena langkah-langkah dalam analisis tersebut sudah sesuai dengan aturan logika dan pengetahuan matematika lainnya dan hasil akhirnya bertentangan dengan pengetahuan matematika yang sudah diketahui kebenarannya, maka letak kesalahannya pasti pada asumsi $\sim p$ benar. Oleh karena itu pengandaian salah dan pernyataan p benar.

Untuk membuktikan suatu pernyataan matematis, mahasiswa harus jeli memilih cara yang sesuai, sehingga memudahkan mahasiswa pada langkah-langkah selanjutnya. Kekurangcermatan dalam memilih cara pembuktian mengakibatkan persoalan menjadi lebih rumit. Sebagai contoh, ketika mahasiswa diminta membuktikan $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, ada mahasiswa yang berusha membuktikan dengan induksi matematika. Hal ini menambah kerumitan pembuktian karena sebenarnya lebih mudah dengan bukti langsung.

Masalah lain yang berkaitan dengan memilih cara pembuktian adalah ketika berhadapan dengan soal yang tidak bisa dibuktikan dengan cara langsung. Mahasiswa selalu terdorong untuk membuktikan suatu pernyataan dengan cara langsung, padahal tidak mungkin. Ketika mereka menyadari bahwa bukti langsung tidak mungkin, mahasiswa mengalami kesulitan untuk membuat negasi dari pernyataan tersebut, terlebih jika kalimatnya panjang. Misalnya membuktikan barisan (n) tidak terbatas, atau membuktikan suatu barisan tidak konvergen ke suatu bilangan tertentu.

Kesulitan mahasiswa lainnya adalah berkaitan dengan membuktikan pernyataan yang konsekuennya kalimat majemuk dengan kata sambung atau, yaitu dalam bentuk $p \to q \vee r$. Sebagai contoh pada soal buktikan jika $ab = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$. Soal ini sebenarnya sudah dibahas di buku *intoduction to real analysis* yang ditulis oleh Bartle dan Sherbert. Namun mahasiswa tidak memahami mengapa dalam pembuktikan dimisalkan $a \neq 0$ kemudian menggunakan hal ini pada hipotesis untuk menunjukkan $b = 0$. Mahasiswa tidak memahami bahwa pernyataan dalam bentuk $p \to q \vee r$ ekuivalen dengan $p \wedge \sim q \to r$, sehingga dalam pembuktian pernyataan yang diketahui adalah $ab = 0$ dan $a \neq 0$ dan yang akan dibuktikan adalah $b = 0$.

Keterkaitan Teorema

Di buku-buku teks Analisis Real banyak terdapat teorema-teorema yang ditulis bersama dengan buktinya. Beberapa teorema yang penting biasanya diberi nama, seperti Teorema Titik Tetap, Teorema Nilai Antara, Ketaksamaan Segitiga, Teorema Apit pada topik Limit Barisan dan Limit Fungsi, dan lain-lain. Beberapa teorema di suatu buku teks Analisis Real bisa jadi merupakan latihan soal di buku Analisis Real lainnya. Teorema-teoream tersebut bersama buktinya harus dipelajari dengan tujuan untuk digunakan pada menyelesaikan masalah yang lain dan juga untuk mendapatkan ide pembuktian yang berguna ketika berhadapan dengan soal pembuktian.

Banyaknya teorema tersebut ternyata bagi mahasiswa merupakan masalah tersendiri. Seringkali penyajian dalam buku teks yang cukup singkat membuat mahasiswa tidak bisa menjiwai alasan perlunya sebuah teorema. Mereka tidak bisa mengaitkan teorema-teorema tersebut dengan masalah yang akan dibuktikan, bahkan ketika mereka diberi petunjuk untuk menggunakan teorema tertentu dalam soal pembuktian. Khususnya pada topik barisan bilangan real, banyak teorema yang bermunculan berkaitan dengan kekonvergenan barisan. Hal ini menimbulkan kebingungan bagi mahasiswa karena ketika berhadapan dengan soal pembuktian yang tergolong soal sulit dalam topik barisan, mereka tidak tahu harus menggunakan teorema yang mana. Padahal banyak masalah pembuktian yang mudah diselesaikan jika menggunakan teorema daripada langsung dari definisi.

Hal ini tercermin pada soal yang diberikan kepada mahasiswa, yaitu “Buktikan barisan $Z = (z_n)$ dengan $z_n = \left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}}$ dan $0 < a < b$ konvergen ke b”. Hampir semua mahasiswa tidak mempunyai ide untuk mengerjakan soal ini. Satu orang yang berusaha mengerjakan soal ini menggunakan definisi barisan konvergen. Namun hasilnya salah karena memang cukup rumit jika menggunakan definisi. Dua orang mahasiswa berusaha menyelesaikan masalah tersebut dengan mencari $\lim \frac{z_{n+1}}{z_n}$. Dengan cara ini pun menyebabkan masalah menjadi rumit karena tidak mudah atau bahkan sangat sulit mencari nilai limitnya. Hal ini menunjukkan bahwa mahasiswa tidak dapat memilih teorema yang tepat dan memudahkan untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Kemudian mahasiswa diberi petunjuk untuk menggunakan teorema apit (*squeeze theorem*). Namun mahasiswa belum melihat keterkaitan teorema apit dengan masalah yang akan diselesaikan dan belum memberi ide kepada mahasiswa untuk mengerjakan pembuktian. Dengan arahan lebih lanjut dari peneliti, akhirnya mahasiswa bisa menyelesaikan soal tersebut.

Kasus lainnya adalah ketika mahasiswa mengerjakan soal “Buktikan untuk setiap $0 \neq a, b \in \mathbb{R}$ berlaku $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a}\frac{1}{b}$!”. Mahasiswa dapat mengerjakan soal ini berdasarkan pengalaman sebelumnya yang pernah mengerjakan soal yang serupa dengan hal tersebut. Mahasiswa mengerjakan soal tersebut dengan bantuan manipulasi aljabar biasa. Kemudian peneliti meminta mahasiswa mengerjakan soal tersebut dengan menggunakan teorema

Untuk setiap $0 \neq a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a \neq 0$, persamaan $ax = b$ mempunyai solusi tunggal $x = \frac{b}{a}$.

Mahasiswa tidak mampu melihat keterkaitan teorema tersebut dengan masalah yang akan dibuktikan. Bahkan ketika peneliti memberikan bantuan lebih lanjut, yaitu dengan mendefinisikan persamaan $(ab)x = 1$, mahasiswa tetap tidak mampu menjawab dengan cara tersebut.

Membuat Contoh dan Contoh Penyangkal

Contoh merupakan salah satu cara untuk memperjelas definisi atau konsep, sedangkan contoh penyangkal digunakan untuk menolak klaim suatu pernyataan. Untuk mengkonstruksi kedua hal tersebut diperlukan kemampuan penalaran dan imajinasi yang baik. Seringkali ditemui mahasiswa mampu mengkonstruksi bukti tetapi tidak mampu membangun contoh sendiri, padahal untuk konsep yang relatif sederhana. Ketika mahasiswa diminta memberikan contoh barisan bilangan irasional yang konvergen ke bilangan rasional, hanya satu orang yang dapat menjawab dengan contoh sendiri, yaitu barisan $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Mengkonstruksi contoh penyangkal juga merupakan bagian yang sulit karena merupakan satu cara menunjukkan bahwa suatu pernyataan tidak benar. Sebagai contoh peneliti bertanya apakah pernyataan, “Hasil kali barisan yang divergen adalah divergen” benar? Tidak ada yang dapat menjawab pernyataan tersebut. Kemudian peneliti menjelaskan bahwa pernyataan tersebut salah dan meminta mahasiswa mencari contoh penyangkal. Namun tidak ada mahasiswa yang mampu mengajukan contoh penyangkal.

SIMPULAN

Berdasarkan temuan pada penelitian ini, kemampuan pembuktian matematis masih merupakan kompetensi matematika yang lemah dikuasai oleh mahasiswa. Ada tujuh jenis kesulitan yang dialami mahasiswa ketika berhadapan dengan masalah pembuktian matematis. Padahal kemampuan tersebut penting dikuasai sebagai calon guru maupun calon matematikawan. Seharusnya aktivitas pembuktian matematis bukan merupakan aktivitas istimewa dalam pembelajaran matematika, namun selalu ada dalam pembelajaran matematika pada setiap jenjang pendidikan (NCTM, 2000).

Temuan-temuan dalam penelitian ini sejalan dengan temuan Moore (1994) yang telah terlebih dahulu melakukan penelitian. Namun, penelitian ini lebih khusus karena materi yang dibahas fokus pada sistem bilangan real dan barisan bilangan real.

DAFTAR RUJUKAN

Alcock, L. dan Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior* 24, 125 - 134

Arnawa, I.M., et al. (2007). Applying The APOS Theory to Improve Students Ability to Prove in Elementary Abstract Algebra. *Journal of The Indonesian Mathematical Society* 13, 133 – 148.

Giannakoulias, E. et al. (2010). Studying teacher’s mathematical argumenation in the context of refuting student’s invalid claims. *Journal of Mathematical Behavior* 29 p. 160 – 168.

Ko, Y. Y., dan Knuth, E (2009). Undergraduate mathematics majors’ writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *Journal of Mathematical Behavior* 28, 68–77.

Polya, G. (1985). *How to solve it A new aspect of mathematical method*. New Jersey: Princeton University Press.

Moore, R.C. (1994). Making the Transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics* 24, 249 – 266.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kusnandi. (2008). *Pembelajaran dengan strategi abduktive-deduktif untuk menumbuhkembangkan kemampuan membuktikan pada mahasiswa*. Desertasi di UPI Bandung: Tidak diterbitkan.

Kogce, D., Aydin, M., dan Yildiz, C. (2010). The views of high school students about proof and their levels of proof (The case of Trabzon). *Procedia Social and Behavioral Sciences* 2, 2544–2549.

Maya, R. (2011). *Pengaruh pembelajaran dengan metode moore termodifikasi terhadap pencapaian kemampuan pemahaman dan pembuktian matematik mahasiswa*. Desertasi di UPI Bandung: Tidak diterbitkan.

Ko, Y. Y., dan Knuth, E (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counter examples about continuous functions. *Journal of Mathematical Behavior* 28, 68–77.