

Penerapan Konsep Lagrangian-Eularian Dalam Pengembangan Dasar Model Matematika Hidraulika Aliran dan Transportasi Polutan: Sebuah Kajian Literatur

Ngakan Putu Purnaditya

Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Sultan Ageng Tirtayasa

Email: purnaditya@untirta.ac.id

ABSTRAK

Fenomena aliran fluida dapat dinyatakan dalam bahasa matematika. Konsep Lagrangian dan Eularian memberi perkembangan konsepsi apakah fluida dinyatakan sebagai satuan partikel atau sejumlah tetap yang melintasi titik tertentu. Kombinasi konsep ini menghasilkan suatu teorema yaitu teorema *Reynolds* yang sangat berguna dalam menyusun persamaan dasar mekanika fluida. Persamaan dasar tersebut yaitu persamaan kekekalan massa, energi dan momentum. Fenomena aliran saluran terbuka menggunakan persamaan kekekalan massa dan momentum untuk kuantifikasi variabel kedalaman dan kecepatan aliran. Di satu sisi, persamaan kekekalan energi diterapkan pada aliran saluran tertutup. Persamaan dasar mekanika fluida juga dapat diterapkan pada penurunan persamaan dasar adveksi-difusi dalam transportasi polutan. Persamaan-persamaan model matematika tersebut dapat dicari solusinya dengan metode numerik persamaan diferensial parsial. Namun hal terpenting dalam penyusunan model matematika adalah menerapkan variabel fisika yang sesuai dengan kondisi dan teori yang berlaku sehingga akan dihasilkan model matematika yang benar.

Kata Kunci: *Teorema Reynolds, Persamaan Kekekalan Massa, Energi dan Momentum*

ABSTRACT

The fluid flow phenomena are commonly stated by the mathematical description. Lagrangian and Eulerian concepts give the advance of the conception whether the fluid is viewed as the number of particles or fixed by boundary points. The combination results in the Reynolds transport theorem which convenient to governing the mass, energy, and momentum conservation equations as the fundamental laws of fluid mechanics. Open-channel hydraulics primarily applies the mass and momentum conservation equations to quantify the depth and velocity of fluid flow. In another hand, the energy conservation equation is applied in closed-channel flow (for example in the pipes system). The fluid mechanics fundamental laws also applicable to mathematical explaining of advection-diffusion in the contaminant transport equation. Due to the mathematical models are in partial differential equation form; the numerical method provides their solution. The most important thing in the governing equation is obeying the proper physic variables and theories, hence it will become the correct mathematical model.

Keywords: *Reynolds Transport Theorem, Mass, Energy and Momentum Conservation Equations*

1. Pendahuluan

Studi dan analisis aliran fluida baik aliran yang sederhana maupun aliran yang rumit, sebenarnya dapat divisualkan pola alirannya. Visualisasi pola aliran fluida tersebut dapat dikembangkan dengan formulasi model matematika [1]. Sepanjang perkembangan pengetahuan mengenai aliran fluida, terdapat dua konsep pendekatan dalam memodelkan aliran fluida secara matematika yaitu konsep Lagrangian dan Eularian [1].

Konsep Lagrangian yang diusulkan oleh Joseph. L. Lagrange (1736-1813) berkonsep pada mekanika partikel fluida. Dalam studi mekanika partikel fluida, perhatian lebih difokuskan pada partikel individu yang pergerakan tiap partikel dinyatakan dan diservasi sebagai fungsi waktu. Hal ini dapat dikatakan bahwa posisi, kecepatan dan percepatan tiap-tiap partikel fluida dinyatakan dalam fungsi matematika $\mathbf{s}(x_o, y_o, z_o, t)$, $\mathbf{V}(x_o, y_o, z_o, t)$, dan $\mathbf{a}(x_o, y_o, z_o, t)$ [1]. Konsep ini memiliki kelemahan yaitu sulitnya untuk dieksekusi meskipun dalam kasus aliran fluida sederhana sekalipun. Hal ini dikarenakan setiap partikel mempengaruhi artikel lainnya sehingga hasil yang teliti membutuhkan diskritasi partikel yang luar biasa banyak [1]. Meskipun demikian, salah satu penelitian yang mengaplikasikan konsep Lagrangian ini yaitu penelitian aliran pada saluran berkelok [2] yang menggunakan metode Smoothed Particle Hydrodynamics sebagai *tools* utama. Selain itu terdapat juga simulasi interaksi *fluid-solid* pada kasus erosi pipa [3] yang juga menerapkan konsep dinamika partikel.

Alternatif dari konsep Lagrangian adalah konsep Eularian. Konsep yang

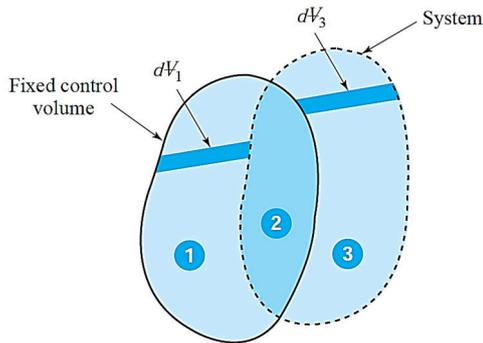
dikembangkan oleh Leonhard Euler (1707-1783) ini mengidentifikasi partikel fluida secara terpisah dengan cara mengidentifikasi suatu lokasi/titik pada fluida secara spasial sehingga dapat diobservasi kecepatan aliran yang melewati titik observasi tersebut. Hal ini mencatat adanya perubahan kecepatan secara spasial $\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial y$, dan $\partial V/\partial z$ [1]. Konsep Eularian secara tidak langsung menyatakan kecepatan fluida sebagai fungsi ruang dan waktu sehingga secara matematika diekspresikan sebagai $V = V(x, y, z, t)$ [1]. Hal ini juga berlaku untuk properti fluida yang lain seperti percepatan, posisi massa jenis dan sebagainya.

Pengembangan model matematika aliran fluida khususnya untuk pengukuran kualitas air tidak lepas dari kedua konsep di atas. Artikel ini berfokus pada pembahasn mengenai beberapa aplikasi model matematika yang digunakan dalam hidraulika aliran dan lingkungan, dimana keseluruhan model tersebut berangkat dari pendekatan Lagrangian dan Eularian. Model aliran yang dikembangkan dewasa ini meliputi aliran pada saluran terbuka, aliran pada media berpori, dan transportasi polutan baik pada media berpori, media *fractured* serta muka air bebas.

2. Konsep Ruang Kontrol-Volume

Kombinasi konsep Lagrangian-Eularian menghasilkan konsep ruang kontrol-volume. Turunan ini diawali dengan konsep Lagrangian yang ditransformasikan sebagai **sistem** yang tetap. **Sistem** yang dimaksud tersebut adalah sekumpulan partikel fluida dalam jumlah yang tetap [1]. Sistem tersebut menempati serta melewati suatu ruang atau titik-titik observasi secara spasial dimana

konsep ini merupakan konsep Eularian. **Gambar 1.** menjelaskan sistem berubah secara temporal pada ruang kontrol yang tetap.



Gambar 1. Sistem dan Ruang Kontrol-Volume [1]

Dari gambar tersebut dapat direnungkan bahwa terdapat dua kondisi yang terjadi antara lain:

1. Kondisi awal pada waktu t , dimana sistem sepenuhnya menempati ruang kontrol-volume (*fixed control volume*).
2. Pada selang waktu Δt berikutnya sistem bergerak meninggalkan ruang kontrol-volume sehingga kini sistem pada waktu $t + \Delta t$ menempati daerah 2 dan 3.

Properti fluida yang dapat dikuantifikasi sesuai dengan **Gambar. 1** cukup bermacam-macam seperti massa, gaya hingga energi. Properti-properti tersebut diterminologikan sebagai properti ekstensif N_{sys} . Dengan ruang kontrol yang tetap baik dari segi lokasi serta ukurannya dan N_{sys} tersebut bergerak keluar dan masuk ruang kontrol secara temporal, maka akan ada perubahan N_{sys} dalam variable waktu atau dalam bahasa matematika ditulis DN_{sys}/Dt . Bentuk diferensial ini

sebenarnya adalah bentuk dasar limit sebagai

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{sys}(t + \Delta t) - N_{sys}(t)}{\Delta t} \quad (1)$$

Jika mengacu pada **Gambar. 1**, bentuk persamaan (1) dapat diekspansi lebih jauh lagi dalam bentuk

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[N_3(t + \Delta t) + N_2(t + \Delta t)] - [N_2(t) + N_1(t)]}{\Delta t} \quad (2)$$

untuk kemudian menjadi

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_2(t + \Delta t) + N_1(t + \Delta t) - N_2(t) - N_1(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (3)$$

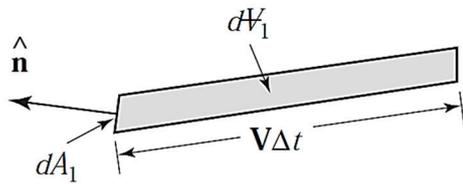
Jika mencermati persamaan (3) maka dapat dikatakan bahwa $N_2(t + \Delta t) + N_1(t + \Delta t)$ merepresentasikan ruang kontrol-volume pada $t + \Delta t$ dan bentuk $N_2(t) + N_1(t)$ merepresentasikan ruang kontrol-volume pada t . Dengan demikian persamaan (3) disederhanakan kembali dalam notasi

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{CV}(t + \Delta t) - N_{CV}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (4)$$

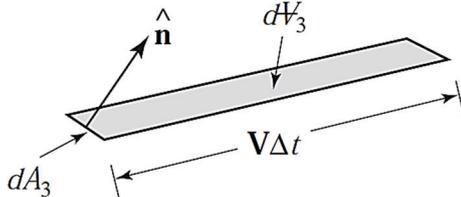
atau

$$= \frac{dN_{CV}}{dt} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (5)$$

Suku kedua sisi kanan persamaan (5) dapat diturunkan berdasarkan **massa** sistem yang menempati elemen volume dV_1 dan dV_3 (**Gambar. 1**) yang jika didetailkan akan tampak pada **Gambar. 2** dan **Gambar. 3**.



Gambar 2. Elemen Volume dV_1 [1]



Gambar 3. Elemen Volume dV_3 [1]

Berdasarkan kedua gambar di atas, untuk sistem yang masuk ruang kontrol-volume maka memiliki arah vektor negatif, sebaliknya untuk sistem keluar ruang kontrol-volume memiliki arah vektor positif. Mengingat massa m dinyatakan dalam bentuk

$$m = \rho V, \quad (6)$$

maka massa yang menempati elemen volume dV_1 dan dV_3 masing masing ditulis dalam bentuk

$$N_1(t + \Delta t) = -d(\hat{n}\eta\rho V\Delta t dA_1), \quad (7)$$

dan

$$N_3(t + \Delta t) = d(\hat{n}\eta\rho V\Delta t dA_3). \quad (8)$$

Jika dinyatakan dalam bentuk integral, persamaan (7) dan persamaan (8) akan menjadi

$$N_1(t + \Delta t) = - \int_{A_1} \hat{n}\eta\rho V\Delta t dA_1, \quad (9)$$

dan

$$N_3(t + \Delta t) = \int_{A_3} \hat{n}\eta\rho V\Delta t dA_3, \quad (10)$$

sehingga terbentuk hubungan

$$N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)$$

$$= \int_{CS} \hat{n}\eta\rho V dA. \quad (11)$$

Persamaan (11) menggunakan variabel massa, sehingga bentuk N_{CV} pada persamaan (5) juga perlu dijabarkan sebagai massa dengan prinsip pada persamaan (6). Hal tersebut menghasilkan bentuk

$$\frac{dN_{CV}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \eta\rho dV, \quad (7)$$

atau

$$\frac{dN_{CV}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} \eta\rho dV. \quad (8)$$

Dengan demikian bentuk akhir dari persamaan (1) adalah dengan menjumlahkan persamaan (8) dan persamaan (11) dan secara matematika ditulis sebagai

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} \eta\rho dV + \int_{CS} \hat{n}\eta\rho V dA. \quad (9)$$

Persamaan (9) disebut sebagai persamaan **Reynolds transport theorem** dimana persamaan ini merupakan transformasi konsep Lagrangian-Eulerian aliran fluida. Pada persamaan (9) terdapat komponen properti ekstensif N_{sys} dan properti intensif η . Hubungan antara properti ekstensif dengan intensif dinyatakan dalam bentuk [4]

$$\eta = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta N_{sys}}{\Delta m}. \quad (10)$$

Teorema Reynolds seperti yang ditunjukkan pada persamaan (9) menjadi titik awal pengembangan model matematika hidraulika baik hidraulika aliran maupun hidraulika lingkungan.

3. Hukum Dasar Mekanika Fluida

Model matematika hidraulika didasarkan pada hukum-hukum dasar mekanika fluida. Hukum-hukum dasar tersebut terdiri atas hukum kekekalan massa, hukum kekekalan energi dan hukum kekekalan momentum. Massa, energi dan momentum dinyatakan sebagai properti ekstensif N_{sys} yang kemudian dengan persamaan (10) dapat ditentukan properti intensifnya.

Hukum Kekekalan Massa

Hukum mekanika fluida pertama adalah hukum kekekalan massa, dimana dalam hal ini $N_{sys} = m$ sehingga berdasarkan bentuk persamaan (10) akan didapat $\eta = 1$. Dengan kondisi ini maka persamaan teorema Reynolds (persamaan (9)) ditulis kembali dalam bentuk

$$\frac{Dm}{Dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \int_{CS} \hat{n} \rho V dA. \quad (11)$$

Hukum kekekalan massa menyatakan bahwa dalam dalam suatu sistem yang tetap dan dapat ditentukan volumenya maka massa sistem tersebut tidak berubah menurut waktu [5] atau $Dm/Dt = 0$. Dengan pernyataan tersebut akan mengubah persamaan (11) dalam bentuk

$$0 = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \int_{CS} \hat{n} \rho V dA. \quad (12)$$

Persamaan (12) ini merupakan **persamaan kekekalan massa**.

Hukum Kekekalan Energi

Hukum kekekalan energi didasarkan dari hukum Termodinamika I, dimana persamaannya ditulis dalam bentuk

$$Q - W = \Delta E. \quad (13)$$

Energi E pada persamaan (13) merupakan jumlah dari energi kinetik E_k

$$E_k = \frac{1}{2} m V^2, \quad (14)$$

energi potensial E_p

$$E_p = mgz, \quad (15)$$

dan energi internal E_i

$$E_i = m\tilde{u}. \quad (16)$$

Dengan demikian maka,

$$E = m \left(\frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u} \right). \quad (17)$$

Dalam persamaan kekekalan energi, properti ekstensif sesuai persamaan (13) adalah $Q - W$ dan properti intensif η sesuai persamaan (17) yang diperlakukan dalam persamaan (10) adalah $e = \left(\frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u} \right)$. Berdasarkan hal ini maka persamaan kekekalan energi ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (Q - W) &= \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} e \rho dV \\ &+ \int_{CS} \hat{n} e \rho V dA. \end{aligned} \quad (18)$$

atau

$$\dot{Q} - \dot{W} = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} \rho p dV + \int_{cs} \hat{n} \rho p V dA. \quad (19)$$

Terminologi laju usaha \dot{W} dalam persamaan (19) terdiri atas [1]:

1. Usaha/kerja hasil dari gaya-gaya tekan yang bergerak pada dinding ruang kontrol-volume, ditulis dalam bentuk

$$\dot{W}_F = \int_{cs} \hat{n} p V dA. \quad (20)$$

2. Usaha/kerja hasil dari rotasi poros turbin atau pompa, \dot{W}_S .
3. Usaha/kerja hasil dari gaya geser yang bekerja pada dinding batas ruang kontrol-volume, \dot{W}_{shear} .
4. Usaha/kerja yang terjadi Ketika ruang kontrol-volume bergerak relative terhadap *fixed reference frame*. Hal ini dinyatakan dalam bentuk

$$\dot{W}_I = - \int_{cs} \tau (\dot{S} + \Omega r) dA. \quad (21)$$

Dari terminologi laju usaha di atas, dapat disusun kembali persamaan kekekalan energi dalam bentuk

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \int_{cs} \hat{n} p V dA - \dot{W}_S - \dot{W}_{shear} \\ + \int_{cs} \tau (\dot{S} + \Omega r) dA \\ = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u} \right) \rho dV \\ + \int_{cs} \hat{n} \left(\frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u} \right) \rho V dA. \end{aligned} \quad (22)$$

atau jika \dot{W}_F dikumpulkan pada sisi kanan persamaan (22) akan mejadi bentuk yang lebih sederhana sebagai

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_S - \dot{W}_{shear} - \dot{W}_I \\ = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u} \right) \rho dV \\ + \int_{cs} \hat{n} \left(\frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u} + \frac{p}{\rho} \right) \rho V dA. \end{aligned} \quad (23)$$

Pada persamaan (23) terdapat terminologi *losses* yaitu bentuk energi yang tidak dapat digunakan [1] dalam bentuk persamaan *losses*

$$\begin{aligned} = -\dot{Q} + \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u} \rho dV \\ + \int_{cs} \tilde{u} \rho V dA. \end{aligned} \quad (24)$$

Dengan demikian maka persamaan energi akan menjadi

$$\begin{aligned} - \dot{W}_S - \dot{W}_{shear} - \dot{W}_I \\ = \int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) \rho dV \\ + \int_{cs} \hat{n} \left(\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho V dA \\ + losses. \end{aligned} \quad (25)$$

Persamaan (25) ini menjadi **persamaan kekekalan energi**.

Hukum Kekekalan Momentum

Hukum dasar mekanika fluida yang terakhir adalah hukum kekekalan momentum dimana hukum ini berangkat dari hukum II Newton

$$\Sigma F = ma. \quad (26)$$

Persamaan (26) jika dinyatakan sebagai persamaan dalam ruang kontrol-volume, maka ditulis dalam bentuk

$$\Sigma F = \frac{D}{Dt} \int_{cv} \rho V dV. \quad (27)$$

Dalam pengembangannya, persamaan (27) menjadi properti ekstensif N_{sys} sedangkan dengan perlakuan pada persamaan (10) properti intensif η didapat $\eta = V$ sehingga persamaan momentum disusun menjadi

$$\Sigma F = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} V \rho dV + \int_{CS} \hat{n} V \rho V dA. \quad (28)$$

Pada akhirnya persamaan (28) tersebut menjadi **persamaan kekekalan momentum.**

4. Penerapan Model Matematika

Persamaan dasar mekanika fluida yang telah disusun (persamaan (12), (25) dan (28)) dapat diaplikasikan dalam berbagai model matematika hidraulika aliran dan lingkungan. Namun demikian, tidak serta-merta ketiga persamaan tersebut digunakan pada setiap model. Beberapa hanya menggunakan dua persamaan, dan beberapa lainnya cukup menggunakan satu persamaan saja.

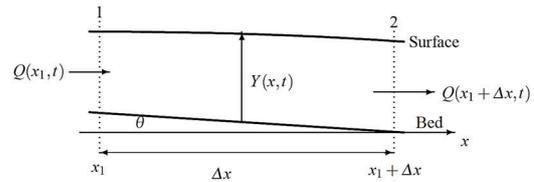
Persamaan Dasar Hidraulika Saluran Terbuka

Pada fenomena aliran saluran terbuka, yang menjadi fokus perhatian adalah perilaku aliran. Perilaku aliran yang dimaksud adalah terkait dengan perubahan kecepatan dan kedalaman aliran. Kedua variabel tersebut merupakan variabel utama dalam persamaan dasar hidraulika saluran terbuka. Dengan demikian dalam hal ini persamaan dasar mekanika fluida yang digunakan adalah persamaan kekekalan massa dan momentum [6].

Penyelesaian integral persamaan kekekalan massa pada persamaan (12) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{d}{dt}(\rho V) + \sum_i \hat{n}_i \rho V_i A_i = 0. \quad (29)$$

Ruang kontrol-volume untuk fenomena aliran saluran terbuka dapat dilihat pada **Gambar 4.**



Gambar 4. Ruang Kontrol-Volume Aliran Saluran Terbuka [7]

Terminologi Q pada **Gambar 4** menunjukkan kecepatan aliran V_i dikalikan dengan luas penampang saluran A_i . Perubahan massa pada **Gambar 4** dalam selang waktu tertentu dijelaskan oleh suku pertama pada persamaan (29) yang ditransformasi menjadi

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = \rho \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (30)$$

Sedangkan untuk suku kedua persamaan (29) dikembangkan menjadi

$$\sum_i \hat{n}_i \rho Q_i = 0, \quad (31)$$

atau

$$\begin{aligned} & \sum_i \hat{n}_i \rho Q_i \\ &= \left[\rho Q_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho Q_x) \frac{\Delta x}{2} \right] \\ & - \left[\rho Q_x \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial x} (\rho Q_x) \frac{\Delta x}{2} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Bentuk persamaan (32) menjadi lebih sederhana dalam bentuk

$$\sum_i \hat{n}_i \rho Q_i = \frac{\partial}{\partial x} (\rho Q_x) \Delta x. \quad (33)$$

atau

$$\sum_i \hat{n}_i \rho Q_i = \rho \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x + Q_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x. \quad (34)$$

Gabungkan kembali persamaan (30) dan (34) ke dalam persamaan (29) sedemikian rupa sehingga

$$\rho \frac{\partial \nabla}{\partial t} + \nabla \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x + Q_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x = 0. \quad (35)$$

Jika pada **Gambar 4** dikatakan bahwa volume dari ruang kontrol-volume sebagai $\nabla = A_x \Delta x$ serta aliran dianggap *incompressible* atau $\partial \rho / \partial t = \partial \rho / \partial x = 0$ maka persamaan (35) menjadi

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0. \quad (36)$$

Persamaan (36) di atas adalah **persamaan kekekalan massa aliran saluran terbuka**. Persamaan tersebut dapat digunakan baik pada penampang *prismatic* maupun *non-prismatic* dan bentuk persamaan (36) merupakan **persamaan konservatif** [8]. Namun selain dalam bentuk konservatif, persamaan (36) dapat juga ditransformasi sebagai persamaan non-konservatif dengan analogi $A = y$ dan $Q = Vy$. Dengan konsep tersebut maka **persamaan kekekalan massa non-konservatif** saluran terbuka dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial y}{\partial t} + V_x \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \quad (37)$$

Persamaan dasar saluran terbuka berikutnya adalah persamaan kekekalan momentum berdasarkan persamaan (28). Penjelasan dari persamaan (28) adalah sisi kiri persamaan merupakan persamaan gaya ΣF sedangkan sisi kanan persamaan (28) sebagai persamaan momentum. Lebih jauh lagi persamaan momentum pada sisi kanan

persamaan (28) terdiri dari dua yaitu suku pertama sebagai *momentum storage* dan suku kedua sebagai *momentum outflow*.

Momentum outflow dalam persamaan (28) dijabarkan dalam bentuk

$$\int_{CS} \hat{n} V \rho V dA = \sum_i \hat{n}_i \rho V_i Q_i, \quad (38)$$

atau untuk arah-x

$$\begin{aligned} & \sum_i \hat{n}_i \rho V_i Q_i \\ &= \left[\beta \rho V_x Q_x + \beta \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x Q_x) \frac{\Delta x}{2} \right] \\ & - \left[\beta \rho V_x Q_x - \beta \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x Q_x) \frac{\Delta x}{2} \right]. \quad (39) \end{aligned}$$

Parameter β pada persamaan (39) merupakan koefisien momentum atau *Boussinesq coefficient* yang mengkalkulasi ketidakseragaman distribusi kecepatan aliran pada potongan melintang saluran [9]. Persamaan (39) kembali disederhanakan menjadi

$$\sum_i \hat{n}_i \rho V_i Q_i = \beta \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x Q_x) \Delta x. \quad (40)$$

Pemekaran persamaan *momentum storage* mengikuti bentuk

$$\int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} V \rho d\nabla = \frac{d}{dt} (V \rho \nabla), \quad (41)$$

dan jika $\nabla = A_x \Delta x$ maka persamaan ini bertransformasi kembali menjadi

$$\int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} V \rho d\nabla = \frac{d}{dt} (\rho Q_x \Delta x). \quad (42)$$

Dengan asumsi yang sama dengan persamaan kekekalan massa (aliran *incompressible*) maka kembali persamaan (42) menjadi lebih sederhana sebagai

$$\frac{d}{dt}(\rho Q_x \Delta x) = \rho \frac{\partial Q_x}{\partial t} \Delta x. \quad (43)$$

Setelah menyusun persamaan *momentum outflow* (persamaan (40)) dan *momentum storage* (persamaan (43)) maka Langkah terakhir dalam persamaan kekekalan momentum adalah mengurai terminologi gaya ΣF . Gaya-gaya yang bekerja pada aliran saluran terbuka terdiri atas [8]:

1. Gaya gravitasi F_g yang dinyatakan dalam bentuk

$$F_g = \rho g A_x S_o \Delta x. \quad (44)$$

2. Gaya friksi F_f yang dibentuk dari

$$F_f = -\rho g A_x S_f \Delta x. \quad (45)$$

3. Gaya kontraksi/gaya ekspansi F_e

$$F_e = -\rho g A_x S_e \Delta x. \quad (46)$$

4. Gaya angin pada muka air selebar T , F_w

$$F_w = -W_f T \rho \Delta x, \quad (47)$$

dengan W_f adalah faktor gaya geser angin.

5. Gaya tekan fluida F_p

$$F_p = -\rho g A_x \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x. \quad (48)$$

Dengan demikian, persamaan (44) hingga persamaan (48) dikumpulkan kembali menjadi

$$\begin{aligned} \Sigma F &= \rho g A_x S_o \Delta x - \rho g A_x S_f \Delta x - \rho g A_x S_e \Delta x \\ &- W_f T \rho \Delta x - \rho g A_x \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x. \end{aligned} \quad (49)$$

Persamaan kekekalan momentum pada persamaan (28) akan disusun dari persamaan (40), persamaan (43) dan persamaan (49) sedemikian rupa sehingga

$$\begin{aligned} &\rho \frac{\partial Q_x}{\partial t} \Delta x + \beta \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x Q_x) \Delta x \\ &= \rho g A_x S_o \Delta x - \rho g A_x S_f \Delta x - \rho g A_x S_e \Delta x \\ &- W_f T \rho \Delta x - \rho g A_x \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x. \end{aligned} \quad (50)$$

Persamaan (50) perlu disederhanakan lagi dengan cara dibagi $\rho \Delta x$ dan menggantikan V_x sebagai Q_x/A_x , sehingga

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q_x}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_x^2}{A_x} \right) \\ &+ g A_x \left(\frac{\partial y}{\partial x} - S_o + S_f + S_e \right) + W_f T \\ &= 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Persamaan (51) di atas adalah persamaan **kekekalan momentum aliran saluran terbuka**. Selain itu bentuk persamaan (51) juga merupakan bentuk **persamaan konservatif**. Transformasi ke bentuk **non-konservatif** juga dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti pada persamaan kekekalan massa, sehingga

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \left(\frac{\partial y}{\partial x} - S_o + S_f \right) = 0. \quad (52)$$

Dari hasil penurunan persamaan kekekalan massa dan momentum pada saluran terbuka, didapat terminologi kondisi konservatif dan non-konservatif. Non-konservatif artinya hasil perhitungan yang didapat adalah hasil untuk per satuan lebar saluran. Persamaan kekekalan massa dan momentum tersebut adalah persamaan dasar aliran saluran terbuka atau **persamaan Saint-Venant**.

Persamaan Dasar Hidraulika Saluran Tertutup

Aliran pada saluran tertutup umumnya tidak menggunakan persamaan kekekalan massa dan momentum namun menggunakan persamaan kekekalan energi. Persamaan kekekalan energi dijabarkan pada persamaan (25). Jika persamaan tersebut diturunkan dengan mengabaikan *work rate* dari gaya geser dan inersia, maka

$$\begin{aligned}
 -\dot{W}_S = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) \rho dV \\
 + \int_{CS} \hat{n} \left(\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho V dA \\
 + \text{losses.} \tag{53}
 \end{aligned}$$

Jika kemudian aliran dianggap *steady* maka $\int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} + gz \right) \rho dV = 0$ sehingga yang tersisa adalah

$$\begin{aligned}
 -\dot{W}_S = \int_{CS} \hat{n} \left(\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho V dA \\
 + \text{losses.} \tag{54}
 \end{aligned}$$

Solusi integrasi dari persamaan (54) tersebut adalah

$$\begin{aligned}
 -\dot{W}_S = \left(\frac{1}{2} V_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) \rho_2 V_2 A_2 \\
 - \left(\frac{1}{2} V_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) \rho_1 V_1 A_1 \\
 + \text{losses,} \tag{55}
 \end{aligned}$$

dan jika $\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$ merupakan fluks massa \dot{m} serta kembali disederhanakan dengan membagi nilai g maka

$$\begin{aligned}
 -\frac{\dot{W}_S}{\dot{m}g} = \left(\frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2} \right) \\
 - \left(\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} \right) \\
 + \text{losses,} \tag{56}
 \end{aligned}$$

dengan γ adalah berat jenis fluida atau $\gamma = \rho g$. Persamaan (56) merupakan **persamaan umum energi** dan dapat diterapkan pada aliran saluran tertutup dalam kondisi *steady* dan *incompressible*.

Sisi kiri persamaan (56) diperhitungkan jika sistem saluran tertutup dilengkapi dengan pompa. Sehingga hal tersebut memberi tambahan *head* pada sistem atau

$$\frac{\dot{W}_S}{\dot{m}g} = \frac{\dot{W}_S}{\gamma Q} = \frac{H_p}{\varepsilon}, \tag{56.a}$$

dengan H_p adalah *head* tambahan dari pompa dan ε adalah efisiensi pompa.

Jika *losses* dan rate kerja pada persamaan (56) diabaikan maka akan menjadi

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} \right) \\
 = \left(\frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2} \right). \tag{57}
 \end{aligned}$$

yang biasa disebut sebagai **persamaan Bernoulli**.

Persamaan Dasar Transportasi Polutan

Transportasi polutan merupakan terminologi lain dari ilmu mekanika fluida lingkungan. Transportasi polutan menjadikan suatu **konsentrasi polutan C** yang memiliki satuan sama seperti massa jenis ρ sebagai variabel utama dalam analisis. Hukum kekekalan massa menjadi satu-satunya hukum mekanika fluida yang digunakan.

Dalam transportasi polutan, model persamaan kekekalan massa ditulis dalam bentuk [10], [11]

$$\int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} C dV + \int_{CS} q dA = 0. \quad (58)$$

Solusi bentuk integral di atas dapat disusun berdasarkan kedua suku persamaan. Bentuk solusi suku pertama dapat ditulis sebagai

$$\int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} C dV = \frac{d}{dt} (CV), \quad (59)$$

dan jika tidak ada perubahan volume dalam ruang kontrol, maka persamaan di atas menjadi

$$\int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} C dV = V \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (60)$$

Setelah suku pertama persamaan (58) disusun, maka suku kedua persamaan tersebut diurai menjadi

$$\begin{aligned} & \int_{CS} q dA \\ &= \left[q_x A_x + \frac{\partial}{\partial x} (q_x A_x) \frac{\Delta x}{2} \right] \\ & - \left[q_x A_x - \frac{\partial}{\partial x} (q_x A_x) \frac{\Delta x}{2} \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

atau

$$\int_{CS} q dA = \frac{\partial}{\partial x} (q_x A_x) \Delta x. \quad (62)$$

Persamaan tersebut kembali diekspansi menjadi

$$\int_{CS} q dA = A_x \Delta x \frac{\partial q_x}{\partial x}. \quad (63)$$

Dengan demikian maka persamaan kekekalan massa untuk transportasi polutan disusun menjadi

$$V \frac{\partial C}{\partial t} + A_x \Delta x \frac{\partial q_x}{\partial x} = 0. \quad (64)$$

Jika direnungkan sedikit lagi, sebenarnya $V = A_x \Delta x$, sehingga

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} = 0. \quad (65)$$

Persamaan ini menyatakan, perubahan konsentrasi polutan C dalam selang waktu tertentu di tambah dengan net flux pada ruang kontrol-volume adalah nol.

Fluks q pada persamaan (65) secara mendasar terdiri atas transport adveksi dan difusi. Transport adveksi terjadi setelah adanya aliran fluida sedangkan transport difusi terjadi setelah adanya perbedaan konsentrasi/gradien konsentrasi [10]. Fluks total dinyatakan dalam [12]

$$q_x = q_{adv} + q_{diff}, \quad (66)$$

dimana, q_{adv} adalah fluks adveksi dan q_{diff} adalah fluks difusi yang didasarkan pada Difusi Fick's. Secara singkat persamaan (66) ditransformasikan menjadi [12]

$$q_x = V_x C + \left(-D \frac{\partial C}{\partial x} \right), \quad (67)$$

dengan D adalah koefisien difusi suatu polutan.

Dari uraian di atas, maka persamaan (65) disusun kembali berdasarkan persamaan (67) dalam bentuk

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(V_x C + \left(-D \frac{\partial C}{\partial x} \right) \right) = 0, \quad (68)$$

atau

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (V_x C) - D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) = 0. \quad (69)$$

Persamaan (69) tersebut merupakan **persamaan dasar transportasi adveksi-difusi** suatu polutan.

Pekerjaan berikutnya adalah mencari solusi dari model-model matematika di atas, khususnya pada persamaan Saint-Venant dan persamaan adveksi-difusi. Solusi dari model matematika tersebut dapat diselesaikan secara numerik. Berbagai cara/metode numerik persamaan diferensial parsial dapat diterapkan seperti metode beda hingga, elemen hingga dan volume hingga. Beberapa skema metode beda hingga dapat dijadikan pertimbangan seperti skema eksplisit, implisit, Crank-Nicholson dan *Alternating Direction Implicit* (ADI) [11], [13], [14].

5. Kesimpulan

Dari keseluruhan penjelasan dalam tulisan ini dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa konsep Lagrangian-Eularian berperan sebagai dasar penurunan fenomena fisik pada hidraulika aliran dan transport pencemar. Konsep tersebut menghasilkan tiga hukum dasar mekanika fluida yaitu hukum kekekalan massa, energi dan momentum. Pada fenomena aliran terbuka, dihasilkan persamaan *Saint-Venant* yang merupakan kombinasi hukum kekekalan massa dan momentum baik dalam kondisi konservatif maupun non-konservatif. Di sisi lain, Hukum kekekalan energi menghasilkan persamaan umum energi dan *Bernoulli*. Penerapan lainnya adalah dalam transportasi pencemar dimana kecepatan aliran dan massa jenis ditetapkan sebagai fluks pencemar q dan konsentrasi pencemar C .

Hal terpenting dalam menggunakan hukum-hukum dasar mekanika fluida yaitu pemahaman mengenai fenomena fisik yang terjadi. Hal ini agar setiap suku-suku persamaan dapat dijabarkan secara benar dan sesuai serta pengertiannya dipahami. Jika fenomena fisik telah benar diterapkan pada setiap persamaan, maka tentunya akan menghasilkan model matematika yang benar pula dan hasil simulasi secara numerik dapat mendekati hasil yang diharapkan.

Penerapan hukum-hukum dasar mekanika fluida lainnya dalam fenomena aliran pada media berpori, gelombang air dan sebagainya. Dalam hal tersebut perlu diperhatikan fenomena-fenomena khusus, misalnya kecepatan aliran pada media berpori tentunya berbeda dengan pada aliran saluran terbuka.

6. Referensi

- [1] M. Potter, D. Wiggert, and B. Ramadan, *Mechanics of Fluids*, 4th ed. Boston: Cengage Learning, 2012.
- [2] D. R. Marthanty, "Development of Smoothed Particle Hydrodynamics Method to Simulate Water Flow in a Curved Channel," in *E-Proceedings of the 37th IAHR World Congress*, 2017.
- [3] J. Sjah and E. Vincens, "Fluid-Solid Interaction in the Case of Piping Erosion: Validation of SPH-ALE Code," *Int. J. Technol.*, vol. 8, no. 6, pp. 1040–1049, 2017.
- [4] M. H. Chaudhry, *Open-Channel Flow*, 2nd ed. New York: Springer Science and Business Media, 2008.
- [5] H. Soeryantono, "Mekanika Fluida Untuk Terapan Dalam Ilmu Keairan," Depok, 2014.
- [6] Istiarto, "Model Hidrodinamika: CFD Di Bidang Hidraulika Saluran Terbuka," 2009. [Online]. Available: <https://istiarto.staff.ugm.ac.id/index.php>

- p/2009/12/model-hidrodinamika/.
[Accessed: 09-Apr-2020].
- [7] X. Litrico and V. Fromion, *Modeling and Control of Hydrosystem*. London: Springer-Verlag, 2009.
- [8] V. Te Chow, D. Maidment, and L. W. Mays, *Applied Hydrology*. Singapore: McGraw-Hill Education, 1988.
- [9] V. Te Chow, *Open Channel Hydraulics*. New York: McGraw-Hill, 1959.
- [10] H. Fischer, J. List, R. Koh, J. Imberger, and N. Brooks, *Mixing in Inland and Coastal Waters*. London: Academic Press, inc, 1979.
- [11] N. P. Purnaditya, H. Soeryantono, D. R. Marthanty, and J. Sjah, "The Finite-Difference Model of Fully Saturated Groundwater Contaminant Transport," *Int. J. Eng. Technol.*, vol. 7, no. 4.35, pp. 629–634, 2018.
- [12] N. P. Purnaditya, H. Soeryantono, and D. R. Marthanty, "Proposing Mathematical Model for Seawater Intrusion Phenomena in the Coastal Aquifer," *MATEC Web Conf.*, vol. 197, no. 10003, 2018.
- [13] N. P. Purnaditya, H. Soeryantono, D. R. Marthanty, and J. Sjah, "Alternating direction implicit scheme as Finite-Difference method to solve coupled groundwater flow and contaminant transport model in the coastal aquifer," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1218, no. 012006, 2019.
- [14] N. P. Purnaditya, "Stabilisasi Model Numerik Intrusi Air Laut Pada Akuifer Terkekang," Universitas Indonesia, 2018.