

Pemodelan Matematis dan Simulasi Perpindahan Panas pada *Fin Heat Exchanger*

RETNO SULISTYO DHAMAR LESTARI¹, DENNI KARTIKA SARI²

¹Jurusan Teknik Kimia, Universitas Sultan Ageng Tirtayasa, Cilegon-Banten
rsdlestari@untirta.ac.id

ABSTRAK

Fin pada alat penukar panas merupakan tambahan luasan yang dapat memperbesar laju perpindahan panas. Pemodelan perpindahan panas pada Fin dilakukan untuk memprediksi pengaruh dari panjang fin (L), lebar fin (w), sudut fin (θ) dan jenis logam terhadap suhu pada ujung fin $T(x=0)$ dan panas yang hilang (Q loss). Pada penelitian ini akan disusun persamaan matematis yang diselesaikan dengan Persamaan Bessel untuk menghitung distribusi suhu di sepanjang Fin dan menghitung panas yang hilang ke lingkungan. Hasil perhitungan temperatur kemudian akan diuji statistik ANOVA untuk mengetahui pengaruh dari masing-masing parameter dan interaksi parameter terhadap suhu pada ujung fin dan panas hilang. Dari hasil perhitungan didapat panas yang hilang berbanding secara linier dengan lebar, panjang dan sudut fin, sementara konduktivitas panas logam memiliki efek yang kecil terhadap peningkatan panas yang hilang. Interaksi panjang dengan lebar fin serta interaksi panjang dengan sudut fin memberikan efek yang positif terhadap peningkatan panas yang hilang. Interaksi panjang dan sudut fin dengan konduktivitas panas logam berpengaruh positif terhadap peningkatan suhu pada ujung fin.

Kata kunci: fin, persamaan bessel, perpindahan panas, uji ANOVA

ABSTRACT

Fin in the heat exchanger is an additional area that can increase the heat transfer rate. Modeling heat transfer in Fin is performed to predict the effect of fin length (L), fin width (w), fin angle (θ) and metal type to temperature at tip fin $T(x = 0)$ and loss heat (Q loss). In this research we will develop a mathematical equation based on Bessel equation to calculate the temperature distribution along Fin and calculate the heat loss to the environment. The result of the temperature calculation will be tested using ANOVA statistics to determine the effect of each parameter and the interaction parameters to the temperature at the end of the fin and heat loss. From the calculation results obtained the heat loss is linearly proportional to the width, length and angle of the fin, while the metal thermal conductivity has a small effect on increasing heat loss. The interaction of the length and the fin width and interaction of the length and the fin angle gives a positive effect on the increase of heat loss. The interaction of the length and the angle of the fin with the metal thermal conductivity has a positive effect on the temperature increase at the tip of the fin.

Keywords: fin, bessel equation, heat transfer, ANOVA test

PENDAHULUAN

Fin (sirip) pada alat penukar panas merupakan tambahan luasan yang bertujuan untuk memperbesar laju perpindahan panas. Pada aplikasinya, jenis fin yang dipilih tergantung pada ruang yang tersedia, berat, proses pembuatan, biaya, dan tentunya besar perpindahan panas tambahan yang dapat dihasilkan. Semakin banyak fin maka mungkin luasnya semakin besar untuk perpindahan panas yang lebih besar, akan tetapi akan menyebabkan pressure drop juga untuk aliran fluida yang melewati fin.

Usaha yang dilakukan peneliti dibidang alat pendingin banyak diarahkan untuk mengembangkan desain baru pada bagian tertentu yang nantinya memberikan efek pada peningkatan efisiensi dan mengurangi penggunaan bahan konstruksi alat. Salah satunya pada penukar panas. Penukar panas jenis pipa dan kawat terbuat dari pipa yang permukaannya diberi sirip berupa kawat. Posisi kawat berpasangan secara simetri pada bagian kanan dan kiri pipa. Pipa dialiri fluida yang akan didinginkan. Tujuan penambahan kawat sebagai fin (sirip) untuk meningkatkan luas permukaan perpindahan panas konveksi bebas. (Ma'sum dkk, 2012)

Fenomena perpindahan panas yang terjadi pada fin adalah perpindahan panas konduksi yang terjadi di sepanjang fin dan perpindahan panas konveksi yang terjadi antara permukaan fin dengan udara lingkungan. Menurut Sediawan (1997), Perpindahan panas konduksi adalah perpindahan panas yang tidak disebabkan gerak makroskopik medianya, tetapi disebabkan oleh gerak molekuler medianya. Hukum yang banyak dipakai untuk konduksi adalah Hukum Fourier

$$Q = -kA \frac{dT}{dx} \quad \dots(1)$$

Dengan :

Q = transfer panas tiap satuan waktu

A = luas permukaan transfer panas

T = suhu

x = jarak (posisi)

k = konduktivitas logam

Perpindahan panas konveksi adalah perpindahan panas antar fasa yang terjadi antara permukaan padatan dengan fluida di dekatnya. Dapat dinyatakan dengan Hukum Newton

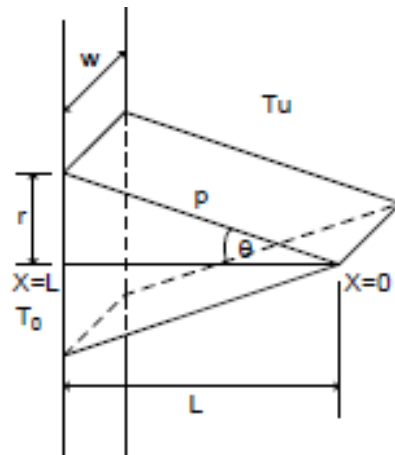
$$Q = hA(T - Tu) \quad \dots(2)$$

Dengan :

A = luas permukaan

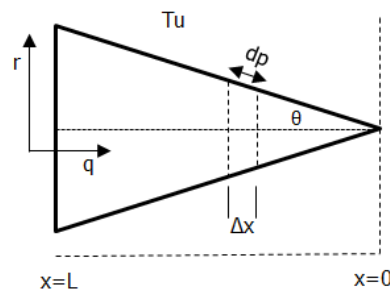
h = koefisien perpindahan panas

Pada penelitian berikut akan ditinjau suatu *Fin* dengan dimensi seperti yang ditunjukkan pada gambar 1.



Gambar 1. Fin

Perpindahan panas yang terjadi pada alat penukar panas berbentuk Fin yaitu perpindahan panas secara konduksi di sepanjang arah aksial dan perpindahan panas konveksi dari permukaan Fin ke udara. (Murachman, 2016). Untuk mengetahui pengaruh pengaruh dari panjang fin (L), lebar fin (w), sudut fin (θ) dan jenis logam terhadap suhu pada ujung fin T ($x=0$) dan panas yang hilang (Q loss) maka disusun persamaan matematis yang dapat dipakai untuk mengetahui distribusi suhu pada keadaan steady state.



Gambar 2. Aliran panas pada Fin

Neraca panas pada elemen volume sepanjang Δx pada *Fin*

Rate of Input – Rate of Output = Rate of Accumulation

$$\left(-kA_2 \frac{dT}{dx}\right)_{x+\Delta x} - \left(-kA_2 \frac{dT}{dx}\right)_{x+\Delta x} + hA_1(T - Tu) = 0 \quad \dots(3)$$

$$\text{Luas perpindahan panas konveksi dinyatakan sebagai } A_1 = 2\Delta x \cdot \sec\theta \cdot w \quad \dots(4)$$

$$\text{Dan luas perpindahan panas konduksi dinyatakan sebagai } A_2 = 2x \cdot \tan\theta \cdot w \quad \dots(5)$$

Substitusi persamaan (4) dan (5) ke persamaan (3) menghasilkan persamaan :

$$-k \cdot 2x \cdot \tan\theta \cdot w \frac{dT}{dx}\bigg|_{x+\Delta x} - \left(-k \cdot 2x \cdot \tan\theta \cdot w \frac{dT}{dx}\bigg|_{x+\Delta x} + 2 \cdot \Delta x \cdot \sec\theta \cdot w \cdot h(T - Tu)\right) = 0 \quad \dots(6)$$

Dalam hal ini T adalah suhu Fin rata-rata antara x sampai $x+\Delta x$. Manipulasi persamaan (7) menghasilkan :

$$\frac{x \frac{dT}{dx}\bigg|_{x+\Delta x} - x \frac{dT}{dx}\bigg|_x}{\Delta x} - \frac{h \cdot \sec\theta}{k \cdot \tan\theta} (T - Tu) = 0 \quad \dots(8)$$

Jika diambil $\Delta x \rightarrow 0$, maka didapat persamaan :

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dT}{dx} \right) - \alpha(T - Tu) = 0 \quad \dots(9)$$

Persamaan matematis untuk peristiwa ini adalah

$$x \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{dT}{dx} - \alpha(T - Tu) = 0 \quad \dots(10)$$

Jika dikalikan x, persamaan menjadi :

$$x^2 \frac{d^2T}{dx^2} + x \frac{dT}{dx} - \alpha x(T - Tu) = 0 \quad \dots(11)$$

Persamaan differensial orde 2 tersebut diselesaikan dengan fungsi Bessel. Dari persamaan umum Bessel (Mickley, 1957) :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x(a + 2bx^r) \frac{dy}{dx} + [c + dx^{2s} - b(1-a-r)x^r + b^2x^{2r}]y = 0 \quad \dots(12)$$

Selanjutnya parameter pada persamaan umum dievaluasi dengan persamaan differensial yang diperoleh, dan hasilnya $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$; $d = -\alpha$; $s = \frac{1}{2}$; $p \neq 0$; dan $\frac{\sqrt{d}}{s} = \text{imaginer}$

Penyelesaian umum yang diperoleh dari persamaan (11) adalah :

$$T(x) = Tu + (T_0 - Tu) \frac{I_0(2\sqrt{\alpha x})}{I_0(2\sqrt{\alpha L})} \quad \dots (13)$$

Persamaan untuk menghitung panas yang hilang dari permukaan Fin ke udara dapat disusun dengan cara integrasi langsung dari persamaan perpindahan panas konveksi pada Fin.

$$Q = \int_0^A h(T - Tu)dA = \int_0^L h \cdot 2 \sec \theta \cdot w(T - Tu)dx \quad \dots(14)$$

Substitusi (T-Tu) dengan persamaan (13) menghasilkan persamaan :

$$Q = \frac{2 h w \sec \theta (T_0 - Tu)}{I_0(2\sqrt{\alpha L})} \frac{L}{\sqrt{\alpha L}} I_1(2\sqrt{\alpha L}) \quad \dots(15)$$

Beberapa parameter yang akan digunakan pada penelitian ini adalah suhu dinding fin (T_0) adalah 100 °C dan suhu udara (T_u) = 35 °C dengan nilai koefisien panas secara konveksi (h) adalah 2 W/m²/°C. Nilai panjang fin (L) dan lebar fin (w) diambil pada kisaran 0,5 hingga 1 m dengan sudut fin (θ) yang digunakan adalah 15° hingga 30°. Sementara untuk jenis logam yang digunakan adalah aluminium dan baja dengan nilai konduktifitas panas masing-masing adalah 204 dan 43 W/m/°C.

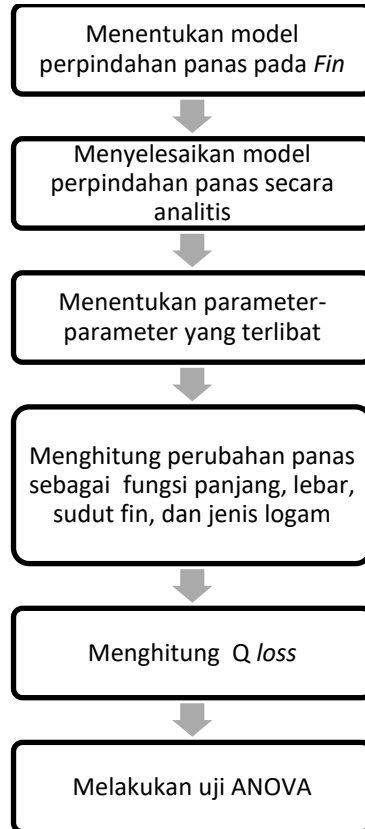
Nilai untuk jenis pertama fungsi Bessel yang telah dimodifikasi (I_0 dan I_1) diperoleh dengan persamaan sebagai berikut :

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!(k+p)!} \quad \dots(16)$$

dengan $p=0$ untuk I_0 dan $p=1$ untuk I_1 . Nilai k yang diambil hingga suku ke 4.

2. METODOLOGI

Pada gambar 3 menunjukkan logaritma perhitungan model perpindahan panas dan simulasi pada alat penukar panas berbentuk Fin



Gambar 3. Logaritma perhitungan

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pengaruh panjang, lebar, dan sudut fin serta pengaruh konduktifitas logam ditampilkan pada Tabel 1. Hasil uji dengan menggunakan analysis of variance (ANOVA) untuk pengaruh dari masing-masing parameter dan interaksi parameter terhadap suhu pada ujung fin dan panas hilang diberikan pada gambar 4 dan gambar 5.

Analysis of Variance					
Source	Sum Sq.	d. f.	Mean Sq.	F	Prob>F
X1	40678.9	1	40678.9	5999.41	0
X2	1596	1	1596	235.38	0
X3	42770.4	1	42770.4	6307.87	0
X4	162.4	1	162.4	23.96	0.0045
X1*X2	211	1	211	31.12	0.0026
X1*X3	4519.2	1	4519.2	666.5	0
X1*X4	55.1	1	55.1	8.12	0.0358
X2*X3	177.3	1	177.3	26.15	0.0037
X2*X4	9.4	1	9.4	1.39	0.2914
X3*X4	18.1	1	18.1	2.66	0.1636
Error	33.9	5	6.8		
Total	90231.6	15			

Gambar 4. Hasil uji ANOVA untuk panas hilang (X1=Panjang fin ; X2= Sudut fin; X3= Lebar fin; X4=Konduktifitas logam)

Tabel 1. Nilai Panas Hilang (Q loss) dan Suhu pada Ujung Fin (T (x=0)) dengan Variasi L, w, θ , dan k

Panjang fin (L), m	θ	Lebar fin (w), m	Konduktifitas logam (k), W/m/°C	Suhu pada ujung fin (T (x=0)), °C	Panas hilang (Q loss), W	Keterangan
0.5	15	0.5	43	94.53	64.44	Basis
0.5	15	0.5	204	98.79	66.66	Variasi 1 (k)
0.5	15	1	43	94.53	128.88	Variasi 1 (w)
0.5	15	1	204	98.79	133.33	Variasi 2 (w,k)
0.5	30	0.5	43	97.08	73.36	Variasi 1 (θ)
0.5	30	0.5	204	99.37	74.69	Variasi 2 (θ ,k)
0.5	30	1	43	97.08	146.73	Variasi 2 (θ ,w)
0.5	30	1	204	99.37	149.38	Variasi 3 (θ ,w,k)
1	15	0.5	43	89.72	123.78	Variasi 1 (L)
1	15	0.5	204	97.61	132.1	Variasi 2 (L,k)
1	15	1	43	89.72	247.56	Variasi 2 (L,w)
1	15	1	204	97.61	264.2	Variasi 3 (L,w,k)
1	30	0.5	43	94.35	143.54	Variasi 2 (L, θ)
1	30	0.5	204	98.74	148.66	Variasi 3 (L, θ ,k)
1	30	1	43	94.35	287.07	Variasi 3 (L, θ ,w)
1	30	1	204	98.74	297.32	Variasi 4 (L, θ ,w,k)

Tabel 1 diperoleh dengan melakukan variasi salah satu variabel sementara variabel yang lain tetap (variasi 1), kemudian dilanjutkan dengan variasi dua variabel dengan variabel yang lain tetap (variasi 2), variasi tiga variabel dengan salah satu variabel dibuat tetap (variasi 3) dan dengan variasi seluruh variabel (variasi 4).

Secara umum hasil dari variasi yang dilakukan menunjukkan bahwa semua variabel memiliki pengaruh yang signifikan terhadap panas yang hilang secara konveksi. Akan tetapi lebar fin tidak cukup signifikan untuk menurunkan suhu pada ujung fin.

Analysis of Variance					
Source	Sum Sq.	d. f.	Mean Sq.	F	Prob>F
X1	21.856	1	21.8556	186.73	0
X2	19.758	1	19.758	168.81	0
X3	-0	1	-0	-0	1
X4	88.642	1	88.6422	757.33	0
X1*X2	1.729	1	1.7292	14.77	0.0121
X1*X3	0	1	0	0	1
X1*X4	8.208	1	8.2082	70.13	0.0004
X2*X3	0	1	0	0	1
X2*X4	7.48	1	7.4802	63.91	0.0005
X3*X4	0	1	0	0	1
Error	0.585	5	0.117		
Total	148.259	15			

Gambar 5. Hasil uji ANOVA untuk suhu pada ujung fin (X1=Panjang fin ; X2= Sudut fin; X3= Lebar fin ; X4=Konduktifitas logam)

3.1. Efek konduktivitas logam (k)

Pada Tabel 1 dapat diamati bahwa konduktivitas lebih berpengaruh terhadap nilai suhu pada ujung fin daripada terhadap panas yang hilang. Hal ini dapat dilihat pula pada hasil ANOVA pada gambar 4 dan yang memberikan nilai F test untuk X4 (konduktivitas) yang cukup kecil bila dibandingkan dengan efek dari tiga variabel yang lain (X1, X2, dan X3). Semakin tinggi konduktivitas logam yang digunakan semakin tinggi suhu pada ujung fin. Hal ini disebabkan karena panas semakin mudah merambat pada logam dengan konduktivitas yang tinggi.

Gambar 4 menunjukkan Interaksi konduktivitas dengan variabel yang lain (X1*X4; X2*X4; X3*X4) juga menunjukkan pengaruh konduktivitas yang lemah terhadap panas yang hilang jika dibandingkan dengan efek dari interaksi antara panjang dengan sudut (X1*X2), interaksi panjang fin dengan lebar fin (X1*X3) dan interaksi antara sudut dengan lebar fin (X2*X3).

Hal sebaliknya teramati pada hasil uji ANOVA untuk suhu di ujung fin (Gambar 5) yang menunjukkan efek konduktivitas logam yang cukup besar dibandingkan dengan pengaruh variabel yang lain. Pengaruh konduktivitas logam yang cukup besar juga teramati pada hasil interaksinya dengan variabel yang lain.

3.2. EFEK LEBAR FIN (W)

Dari Tabel 1 dapat diamati bahwa pengaruh lebar fin proporsional terhadap panas yang hilang. Dengan memperlebar fin sebesar dua kali lebar fin mula-mula, panas yang hilang meningkat sebanyak dua kali (variasi 1(w)). Hasil ini cukup wajar mengingat luas area transfer panas secara konveksi lebih banyak dipengaruhi oleh luas muka fin yang merupakan fungsi dari panjang dan lebar fin.

Dari hasil uji ANOVA pada gambar 4, lebar fin merupakan variabel yang paling berpengaruh terhadap panas yang hilang. Hal ini ditunjukkan dari nilai F tes untuk lebar fin yang tertinggi diantara variabel yang lain. Secara matematis, suhu pada ujung fin hanya merupakan fungsi dari panjang fin (persamaan (10)) sehingga praktis lebar fin tidak akan mempengaruhi suhu pada ujung fin.

3.3. EFEK SUDUT FIN (θ)

Sudut fin mempengaruhi luas area transfer panas ke udara. Hal ini dapat dilihat pada daftar 1 dimana dengan meningkatkan sudut fin sebesar dua kali sudut semula, panas yang hilang ke udara mengalami peningkatan sekitar 13% dari panas hilang mula-mula. Hal ini disebabkan karena peningkatan sudut akan memperpanjang sisi miring dari fin yang praktis berpengaruh terhadap semakin luasnya area transfer panas.

Suhu pada ujung fin hanya turun sekitar 3% dari suhu di dinding dengan menambah sudut fin dua kali dari sudut semula. Dari hasil uji ANOVA, efek sudut fin merupakan efek terbesar ketiga setelah lebar dan panjang fin baik untuk pengaruh terhadap panas hilang maupun terhadap suhu pada ujung fin.

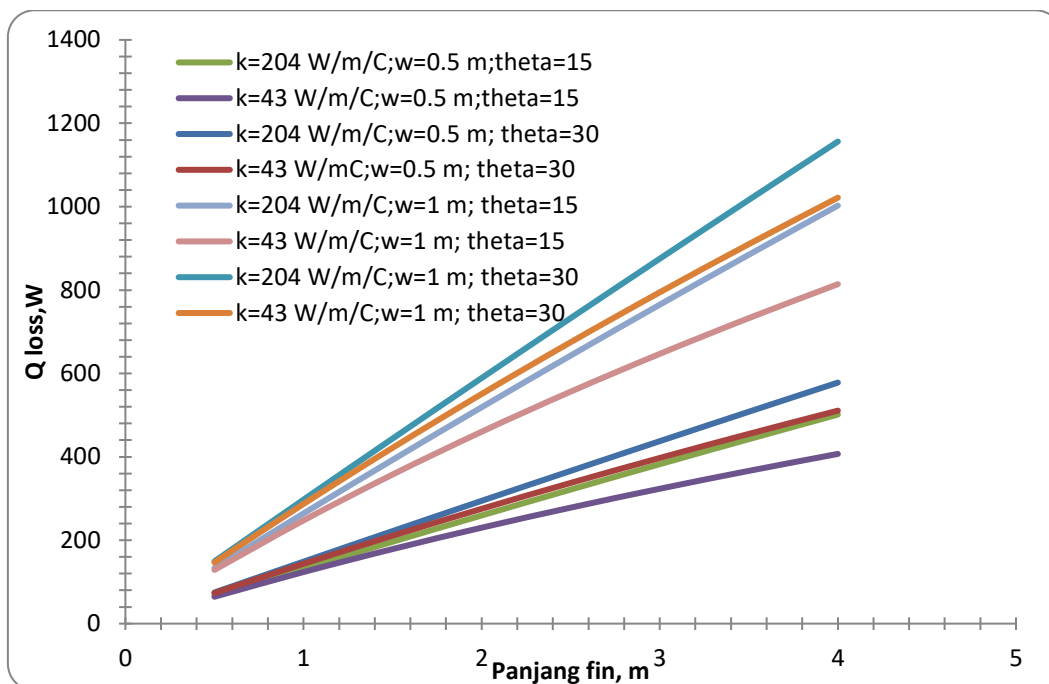
3.4. EFEK PANJANG FIN (L)

Pengaruh panjang fin terhadap panas yang hilang sedikit lebih rendah dibandingkan dengan pengaruh lebar fin. Dengan memperpanjang fin dua kali dari panjang semula, panas yang hilang juga meningkat sebesar 1,92 kali panas hilang mula-mula. Berbeda halnya dengan lebar fin yang tidak mempengaruhi suhu pada ujung fin, dengan memperpanjang fin dua kali, suhu pada ujung fin akan turun lebih dari 10% dari suhu pada dinding (Tabel 1, variasi 1 (L)). Hasil uji ANOVA juga menunjukkan bahwa panjang fin signifikan berpengaruh terhadap panas yang hilang dan penurunan suhu pada ujung fin.

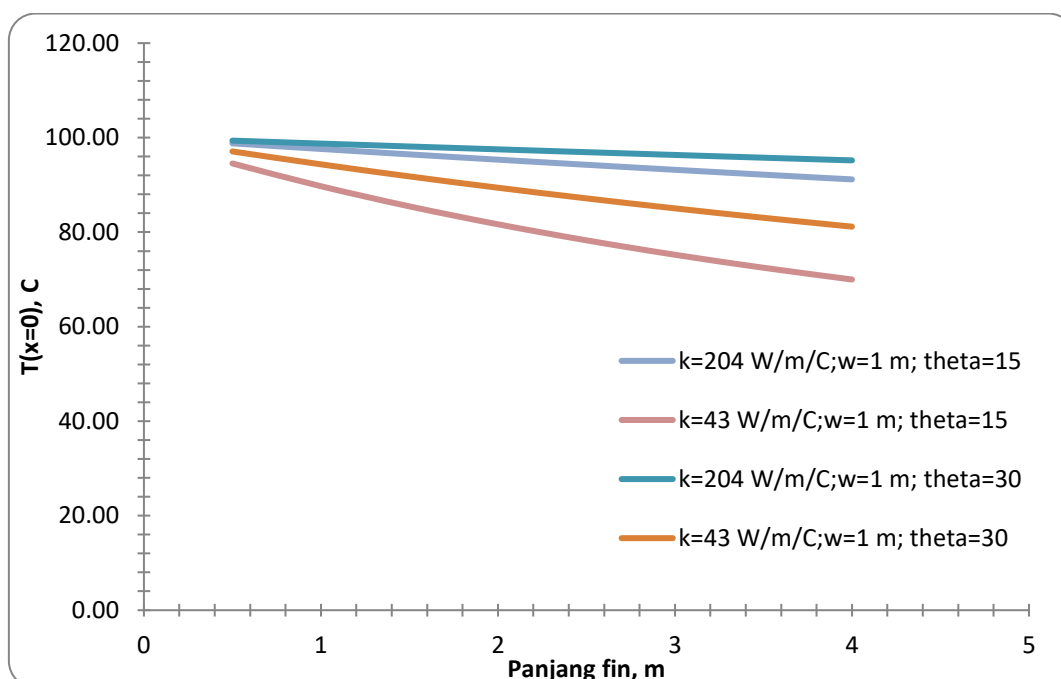
Grafik pengaruh panjang fin terhadap panas hilang pada berbagai nilai konduktifitas, lebar dan sudut fin disampaikan pada gambar 6. Sementara pengaruh panjang fin terhadap suhu pada ujung fin pada berbagai konduktifitas dan sudut fin disampaikan pada Gambar 7. Oleh karena suhu pada ujung fin tidak merupakan fungsi dari lebar fin, maka pada Gambar 7 hanya digunakan salah satu nilai dari lebar fin yaitu 1 m. Data hasil perhitungan disampaikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Hasil Perhitungan Pengaruh Panjang, Lebar, dan Sudut Fin serta Konduktifitas Logam terhadap Panas Hilang dan Suhu pada Ujung Fin

L, m	θ	w, m	k=204 w/m/°C		k=43 w/m/°C	
			T(x=0), °C	Q loss, W	T(x=0), °C	Q loss, W
0.5	15	0.5	98.79	66.66	94.53	64.44
1	15	0.5	97.61	132.10	89.72	123.78
1.5	15	0.5	96.46	196.35	85.46	178.80
2	15	0.5	95.34	259.47	81.66	230.10
2.5	15	0.5	94.25	321.48	78.27	278.19
3	15	0.5	93.20	382.43	75.22	323.50
3.5	15	0.5	92.17	442.35	72.47	366.35
4	15	0.5	91.16	501.29	69.98	407.03
0.5	30	0.5	99.37	74.69	97.08	73.36
1	30	0.5	98.74	148.66	94.35	143.54
1.5	30	0.5	98.13	221.92	91.79	210.79
2	30	0.5	97.52	294.49	89.40	275.37
2.5	30	0.5	96.93	366.37	87.15	337.48
3	30	0.5	96.34	437.59	85.03	397.31
3.5	30	0.5	95.76	508.15	83.04	455.04
4	30	0.5	95.19	578.07	81.16	510.81
0.5	30	1	99.37	149.38	97.08	146.73
1	30	1	98.74	297.32	94.35	287.07
1.5	30	1	98.13	443.84	91.79	421.58
2	30	1	97.52	588.97	89.40	550.73
2.5	30	1	96.93	732.74	87.15	674.95
3	30	1	96.34	875.17	85.03	794.62
3.5	30	1	95.76	1016.30	83.04	910.07
4	30	1	95.19	1156.13	81.16	1021.63
0.5	15	1	98.79	133.33	94.53	128.88
1	15	1	97.61	264.20	89.72	247.57
1.5	15	1	96.46	392.71	85.46	357.59
2	15	1	95.34	518.93	81.66	460.20
2.5	15	1	94.25	642.96	78.27	556.39
3	15	1	93.20	764.86	75.22	646.99
3.5	15	1	92.17	884.71	72.47	732.69
4	15	1	91.16	1002.58	69.98	814.07



Gambar 6. Pengaruh panjang fin (L) terhadap panas hilang (Q_{loss}) pada berbagai nilai k, θ , dan w



Gambar 7. Pengaruh panjang fin (L) terhadap Suhu pada ujung fin ($T(x=0)$) pada berbagai nilai k dan θ

3.5. Interaksi Variabel

Efek interaksi antar variabel dapat dilihat baik dari Tabel 1 maupun dari gambar 6 dan gambar 7. Dari gambar 6 dapat dilihat bahwa panjang fin (X_1) berinteraksi kuat dengan lebar fin (X_3) dalam meningkatkan panas yang hilang. Hal ini merupakan hal yang wajar mengingat panjang dan lebar fin sangat mempengaruhi luas area transfer panas dari fin.

Selain itu interaksi panjang dan sudut fin dengan konduktifitas dalam mempengaruhi suhu pada ujung fin juga dapat dilihat dari Gambar 7. Dari efek masing-masing variabel, memperbesar panjang dan sudut fin akan menurunkan suhu pada ujung fin sementara konduktifitas menimbulkan efek sebaliknya. Dalam hal ini diperlukan optimasi antara konduktifitas logam, panjang dan sudut fin agar suhu pada ujung fin bisa lebih rendah.

Efek dari meningkatkan keempat variabel secara bersamaan dapat dilihat dari Tabel 1 pada variasi 4 (L, θ, w, k). Panas yang hilang sekitar 4 kali panas yang hilang mula-mula, sementara itu suhu pada ujung fin hanya turun sekitar 1°C . Dalam hal diinginkan suhu ujung fin yang rendah dan panas yang hilang cukup besar, maka kondisi ini memerlukan langkah optimasi terhadap variabel-variabel L, θ, w , dan k .

4. KESIMPULAN

Adapun kesimpulan yang bisa diambil adalah :

Panas yang hilang berbanding secara linier dengan lebar, panjang dan sudut fin, sementara konduktifitas panas logam memiliki efek yang kecil terhadap peningkatan panas yang hilang. Suhu pada ujung fin berbanding lurus dengan nilai konduktifitas panas logam, panjang, dan sudut fin. Interaksi panjang dengan lebar fin serta interaksi panjang dengan sudut fin memberikan efek yang positif terhadap peningkatan panas yang hilang. Interaksi panjang dan sudut fin dengan konduktifitas panas logam berpengaruh positif terhadap peningkatan suhu pada ujung fin.

DAFTAR RUJUKAN

- Ma'sum, Z., Arsana, M., Malik, F., Priyono, W., Altway, A., (2012), *ANALISIS PERPINDAHAN PANAS DENGAN KONVEKSI BEBAS DAN RADIASI PADA PENUKAR PANAS JENIS PIPA DAN KAWAT*, Jurnal Teknik Kimia, Vol. 7 No. 1
- Mickley, H. S., Sherwood, T. K., and Reed, C. E., (1957), *Applied Mathematics in Chemical Engineering*, 2nd ed., Tata McGraw-Hill Publishing Company, Inc., New Delhi.
- Murachman, Bardi, (2016), *Aplikasi Matematika Analitis Untuk Bidang Teknik*, Gadjah Mada University Press.
- Sediawan, W. B., Prasetya, A., (1997), *Pemodelan Matematis dan Penyelesaian Numeris dalam Teknik Kimia*, Penerbit Andi Yogyakarta