Jurnal Teknika | Vol. 15 | No. 1 | Hal 23 - 28
ISSN : 1693-024X [Juni] [2019]
eISSN : 2653-4113 DOI: http://dx.doi.org/10.36055/tjst.v15i1.5962

Energi Jarak dari Graf Kipas

M A SHULHANY[1], A AGUSUTRISNO[2]

[1]Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Sultan Ageng Tirtayasa
Jl. Jend. Sudirman KM. 03 Kotabumi, Cilegon 42435
[2]Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Sultan Ageng Tirtayasa
Jl. Jend. Sudirman KM. 03 Kotabumi, Cilegon 42435
Email: ahmad.s@untirta.ac.id

ABSTRAK

Graf $G=(V_G, E_G)$ merupakan himpunan terurut dari himpunan titik dan himpunan sisi. Panjang lintasan terpendek antara dua titik $u \in V_G$ dan $v \in V_G$ dinamakan jarak, dinotasikan dengan $d(u,v)$. Keluarga lintasan saling lepas secara internal dengan titik ujungnya u dan v, dinotasikan dengan $P(u,v)$. Urutan panjang lintasan $P(u,v)$ dari yang terpendek hingga terpanjang dinamakan lintasan disjoin ke-i atau $P_i(u,v)$. Jarak ke-i, ditulis $d_i(u,v)$, adalah $\min\{|P_i(u,v)|\}$, dapat direpresentasikan ke dalam matrik jarak ke-i atau $M_i(G)=[d_i(u,v) \mid (u,v) \subseteq E_G]$, Akar-akar dari polinomial karakteristik $\omega(G:\lambda)=\det(\lambda I - M_i(G))=0$ yaitu $\lambda_1, \lambda_2,$ dan λ_n disebut nilai eigen pada G. Energi jarak ke-i pada G didefinisikan sebagai $E_i(G)=\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|$. Penelitian ini berfokus untuk menentukan energi jarak dari graf kipas.

***Kata kunci**: Energi jarak, graf kipas*

ABSTRACT

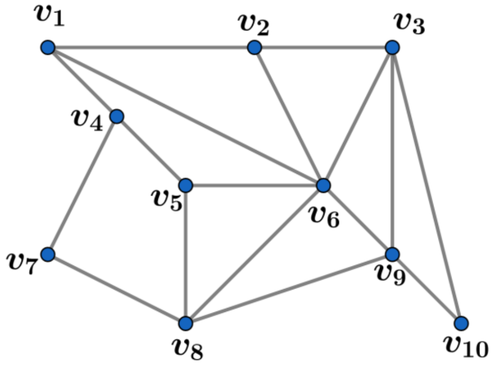
A graph G is an ordered set of vertices set and edges set. The shortest path length between two points $u \in V_G$ *and* $v \in V_G$ *is called distance, denoted by* $d(u,v)$. *The family of internally disjoint paths with common endpoints u and v, denoted by* $P(u,v)$. *The order of the length of* $P(u,v)$ *from the shortest path to the longest path is called the i-th path or* $P_i(u,v)$. *The i-th distance, denoted by* $d_i(u,v)$, *is* $\min\{|P_i(u,v)|\}$, *can be represented in the i-th distance matrix or* $M_i(G) = [d_i(u,v) \mid (u,v) \subseteq E_G]$. *The roots of the characteristic polynomial* $\omega(G:\lambda) = \det(\lambda I - M_i(G)) = 0$ *named* $\lambda_1, \lambda_2,$ *and* λ_n *are called eigenvalues of G. The i-th distance energy in G is defined as. This study focuses on determining the distance energy of a graph.*

Keywords*: The i-th distance energy, fan graph*

1. PENDAHULUAN

Molekul hidrokarbon merupakan salah satu molekul yang berperan penting dalam banyak proses kimia di industri. Dalam matematika, bentuk molekul dapat direpresentasikan dalam bentuk titik dan garis. Titik mewakili atom karbon pada hidrokarbon dan garis mewakili ikatan yang terbentuk antar-atom karbon. Representasi tersebut selanjutnya disebut graf molekul (Yegnanarayan, 2017). Ivan Gutman (2001) dalam penelitiannya menunjukkan bahwa ada hubungan antara elektron-π dan graf molekul. Hubungan itu terjadi pada energi elektron-π pada molekul hidrokarbon dan graf molekulnya, keduanya diketahui memiliki hubungan matematis. Dalam artikel ini, semua molekul direpresentasikan sebagau suatu graf dan dan dihitung energi berdasarkan jarak ke-i.

Graf $G = (V_G, E_G)$ merupakan himpunan terurut dari himpunan titik dan himpunan sisi. Panjang atau kardinalitas lintasan terpendek antara dua titik $u \in V_G$ dan $v \in V_G$ dinamakan jarak, dinotasikan dengan $d(u,v)$. Perhatikan graf pada **Gambar 1**, notasi $d(v_1, v_8) = 2$ menunjukkan kardinalitas (banyak sisi) dari lintasan terpendek dengan titik ujungnya v_1 dan v_8 adalah 2. Untuk dua titik yang tidak terhubung, berlaku $d(u,v) = \infty$ (Opsahl, dkk: 2010).



Gambar 1. Ilustrasi graf G.

Keluarga lintasan saling lepas secara internal dengan titik ujungnya u dan v, dinotasikan dengan $P(u,v)$. Urutan panjang lintasan $P(u,v)$ dari yang terpendek hingga terpanjang dinamakan lintasan disjoin ke-i atau $P_i(u,v)$. perhatikan **Gambar 1**, dari titik v_1 hingga titik v_8. Kedua titik memiliki derajat terkecilnya tiga, maka keluarga lintasan saling lepas secara internalnya berjumlah empat.

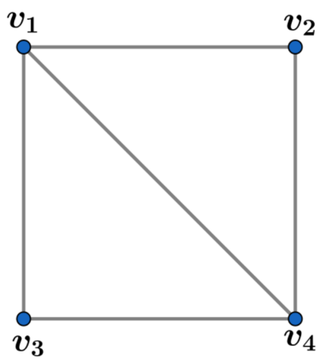
$$P_1 = \{v_1v_6, v_6v_9\}$$
$$P_2 = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_9\}$$
$$P_3 = \{v_1v_4, v_4v_5, v_5v_8, v_8v_9\}$$

$$P_1 = \{v_1v_6, v_6v_9\}$$
$$P_2 = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_{10},, v_{10}v_9\}$$
$$P_3 = \{v_1v_4, v_4v_5, v_5v_8, v_8v_9\}$$

$$P_1 = \{v_1v_6, v_6v_9\}$$
$$P_2 = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_{10},, v_{10}v_9\}$$
$$P_3 = \{v_1v_4, v_4v_7, v_7v_8, v_8v_9\}$$

$$P_1 = \{v_1v_6, v_6v_9\}$$
$$P_2 = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_9\}$$
$$P_3 = \{v_1v_4, v_4v_7, v_7v_8, v_8v_9\} \qquad (1)$$

Jarak ke-i, ditulis $d_i(u,v)$, didefisisikan oleh Hsu dan Luczak (1994) adalah $\min\{|P_i(u,v)|\}$. Berdasarkan keluarga lintasan pada **(1)**, nampak bahwa $d_1(v_1,v_9)=2, d_2(v_1,v_9)=3$, dan $d_3(v_1,v_9)=4$. Jarak ke-i dapat direpresentasikan ke dalam matrik jarak ke-i atau $M_i(G)=[d_i(u,v)|(u,v)\subseteq E_G]$. Graf pada **Gambar 1** dapat direpresentasikan dalam matrik jarak ke-i dengan ukuran 10x10.



Gambar 2. Graf K4-e.

Matrik jarak ke-1 dari graf K4-e yaitu:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrik jarak ke-2 dari graf K4-e yaitu:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Akar-akar dari polinomial karakteristik $\omega(G:\lambda) = \det(\lambda I - M_i(G)) = 0$ yaitu $\lambda_1, \lambda_2,$ dan λ_n disebut nilai eigen pada G. Polinomial karakteristik dari matrik jarak ke-1 graf K4-e yaitu: $\lambda^4 - 9\lambda^2 + 12\lambda - 4 = 0$ atau $(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda - 2) = 0$ dengan nilai-nilai enigennya yaitu $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}, \lambda_3 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$. Polinomial karakteristik dari matrik jarak ke-2 graf K4-e yaitu: $\lambda^4 - 24\lambda^2 + 24\lambda - 48 = 0$ atau $(\lambda - 6)(\lambda + 2)(\lambda + 2)(\lambda + 2) = 0$ dengan nilai-nilai enigennya yaitu $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -2, \lambda_3 = -2$.

Energi jarak ke-i pada G didefinisikan sebagai $E_i(G) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$. Energi ke-1 dari graf K4-e yaitu $E_1(G) = 6 + |-2| + \left| -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \right| + \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \right) = 8 + \sqrt{17}$, dan energi ke-2 dari graf K4-e yaitu $E_2(G) = 6 + |-2| + |-2| + |-2| = 12$. Dengan cara yang serupa kita bisa dapat $E_1(K_n) = 2n - 2.$ Graf yang memiliki energi yang lebih besar dari graf K_n disebut graf hiperenergetik (Xueliang, dkk: 2010). Pada artikel ini, hal yang dibahas yaitu energi jarak ke-i pada graf kipas.

2. METODE PENELITIAN

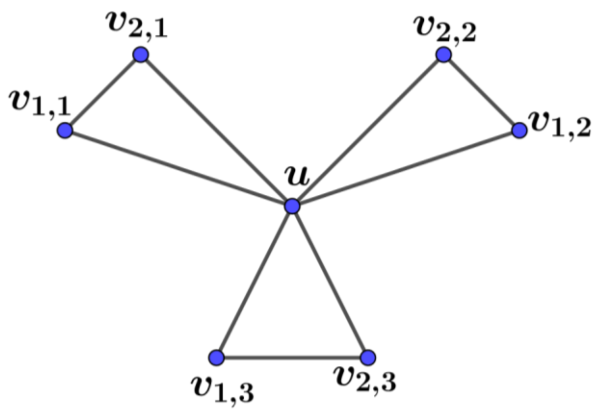
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode matematis. Tahapan yang dilakukan merupakan kombinasi dari bagian teori graf dan aljabar. Secara sistematis tahapan yang dilalui adalah:
1. Studi literatur tentang energi graf
2. Studi literatur tentang jarak ke-i
3. Penentuan kelas graf yang akan diteliti
4. Pembuatan definisi kelas graf yang diteliti
5. Pembuatan matrik jarak ke-i dari graf yang diteliti
6. Penentuan energi jarak ke-i dari graf yang diteliti
7. Menentukan kesimpulan dan masalah terbuka

3. HASIL UTAMA DAN PEMBAHASAN

Kelas graf yang diperkenalkan dalam artikel ini adalah graf kipas. Graf kipas, ditulis F_n, merupakan graf Harary teratur-3 dengan banyak titik 2*n*+1, didefinisikan dengan himpunan titik dan himpunan sisi berturut-turut yaitu:

$$V_{Pj_n} = \{u\} \cup \{v_{i,j} \mid 1 \le i \le 2, 1 \le j \le n\}$$

$$E_{Pj_n} = \{uv_{i,j} \mid 1 \le i \le 2, 1 \le j \le n\} \cup \left\{ v_{1,j}v_{2,j} \mid 1 \le i \le j,\, j = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\} \qquad (2)$$



Gambar 3. Ilustrasi F_3.

Teorema 1. Misalkan F_n adalah graf banteng dengan 2n+1 buah titik dan $n \ge 2$, maka

$$E_1(F_n) = 8n - 2$$

Bukti. Graf F_n merupakan graf terhubung-1 dan hanya memiliki matrik jarak ke-1, yaitu:

$$M_1(F_n) = \begin{bmatrix} I_2^T & & & 1_{1x2n} \\ & I_2^T & 2 & 2 \\ & 2 & \ldots & 2 \\ 1_{2nx1} & 2 & 2 & I_2^T \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\omega(G:\lambda) = \lambda^n + 4\lambda^{n-1} + \ldots + \frac{1}{4}\left[(4n+1)^2 - \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 4\right)^2 - \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3\right)^2 - 10(n-2) \right](-3)^{n-1}(-1)^n$$

Menghasilkan nilai-nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left[(4n+1)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+4\right)^2+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+3\right)^2+10(n-2)}\right]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left[(4n+1)-\sqrt{\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+4\right)^2+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+3\right)^2+10(n-2)}\right]$$

$$\lambda_3,\ldots,\lambda_{n+1} = -3$$

$$\lambda_{n+2},\ldots,\lambda_{2n+1} = -1$$

Maka, energi jarak ke-1 nya yaitu:

$$E_1(F_n) = |\lambda_1|+|\lambda_1|+\ldots+|\lambda_{2n+1}| = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+4\right)^2+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+3\right)^2+10(n-2)}\right)+3(n-1)+(n)$$

$$E_1(F_n) = |\lambda_1|+|\lambda_1|+\ldots+|\lambda_{2n+1}| = 4n-3+\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+4\right)^2+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+3\right)^2+10(n-2)}\right).\therefore$$

4. KESIMPULAN

Graf Kipas F_n dengan titik sebanyak 2n+1 merupakan graf hiperenergetik, atau graf yang memiliki energi jarak lebih besar dari graf lengkap K_n, yaitu

$$E_1(F_n) = 4n-3+\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+4\right)^2+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+3\right)^2+10(n-2)}\right) > 2n-2 = E_1(K_n).\therefore$$

DAFTAR RUJUKAN

Gutman, I. (2001). The energy of a graph: old and new results, dalam: A. Betten, A. Kohnert, R. Laue, A. Wassermann (Eds.), (2001). *Algebraic Combinatorics and Applications.* Berlin: Springer-Verlag, 196–211.

Hsu, D. F., & Luczak, T. (1994). The *k*-Diameter of *k*-Regular *k*-Connected Graphs. *Discrete Mathematics,* 291-296.

Opsahl, T., Agnessens, F., & Skvoretz, J. (2010). Node Centrality in Weighted Networks: Generalizing Degree and Shortest Paths. *Social Networks* , Vol. 32, 245-251.

Wasserman, S., & Faust, K. 2010. *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Newyork: Cambridge University Press.

Xueliang, L., Yongtang, S., & Gutman, I. (2010). *Graph Energy*. London: Springer.

Yegnanarayanan, V. (2017). On Some Aspects of The Generalized Petersen Graph. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications,* 163-178.